Fizyka dla projektantów gier

I : Podstawowe Pojęcia

Zasady dynamiki Newtona

Około 1687 roku, Isaac Newton, wyłożył swoją filozofię na temat mechaniki w swojej Philosophiae Naturalis Principia Mathematica .W pracy tej określił, obecnie znane zasady dynamiki, które tu podsumujemy:

Zasada I: Jeżeli na ciało nie działa żadna siła lub siły działające równoważą się to ciało to pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym

Zasada II : Jeżeli na ciało działa siła niezrównoważona to ciało to porusza się ruchem zmiennym wartość przyspieszenia w tym ruchu jest wprost proporcjonalna do masy ciała i do wartości liczbowej działające siły

Zasada III: Jeżeli ciało A działa na ciało B pewną siłą F to ciało B działa na ciało A siłą F o tym samej wartości , kierunku ale o przeciwnym zwrocie

Prawa te formują podstawy dla wielu analiz na polu mechaniki. Dla nas szczególnie interesująca, w badaniu dynamiki, jest druga zasada ,którą można zapisać wzorem:

$$F=ma$$

gdzie F jest siłą wypadkową działającą na ciało, m jest masą tego ciała a a jest liniowym przyspieszeniem środka ciężkości ciała

Jednostki i Miary

Aby sprawdzić zgodność wymiarów, należy bliżej przyjrzeć się jednostką miary i rozważyć wymiary ich części. Nie mówimy tu o wymiarze 2D lub 3D, ale raczej o podstawowych mierzalnych wymiarach, które składają się na różne jednostki pochodne jakich będziemy używać. Są to masa, długość i czas. Ważne jest aby być świadomym tych wymiarów ,jak również połączeń tych wymiarów, które tworzą inne pochodne jednostki, dzięki czemu można zapewnić zgodność wymiarów w obliczeniach. Na przykład wiemy ,że waga obiektu jest mierzona jednostkami siły, która może być podzielona na części wymiarów:

$$F = (M)(D/T^2)$$

gdzie M to masa, D długość a T to czas. Czy to wygląda znajomo? Cóż, jeśli rozważymy ,że element jednostki dla przyspieszenia to (D/T^2), niech a będzie symbolem przyspieszenia, i niech m będzie symbolem dla masy obiektu, otrzymamy

$$F= ma$$

co jest wyrażeniem dla drugiej zasady Newtona.

W żaden sposób nie czerpałem z tej słynnej zasady. To co zrobiłem to było sprawdzenie zgodności wymiarów ,choć w odwrotnej kolejności. Wszystko to oznacza ,że wszelkie formuły przedstawiające siłę działającą na ciało, lepiej wyjdą na spójnym zestawie jednostek w formie: (M)(D/T2). Teraz to wydaje się trywialne, jednak kiedy zaczniemy szukać bardziej złożonych formuł dla sił działających na ciało, będziemy mogli podzielić te formuły na ich elementy wymiaru aby można było sprawdzić ich zgodność wymiarową. Aby rozjaśnić ten punkt, rozważmy formułę dla oporu tarcia ciała poruszającego się w płynie, takim jak woda:

$$O_f = 1/5 \rho V^2 S C_f$$

W tym wzorze O_f przedstawia opór (siła) ze względu na tarcie, ρ jest gęstością wody, V jest szybkością przesuwania się ciała, S to obszar zanurzonej powierzchni ciała a Cf jest empirycznym (określonym doświadczalnie) współczynnik oporu dla tego ciała. Teraz przepiszmy ten wzór w zakresie podstawowych wymiarów zamiast zmiennych, pokazujących, że wymiary po lewej stronie wzoru pasuje dokładnie wymiarowi po prawej stronie. Ponieważ Of jest siłą,, jej podstawową miarą jest wzór

$$(M)(D/^{T2)}$$

omawianego wcześniej, co implikuje ,że wymiary wszystkich warunków po prawej stronie równania, w połączeniu, musza podać odpowiedni wzór. Rozważając podstawowe jednostki gęstości, szybkości i powierzchni:

Gęstość

$$(M)/(D^3)$$

Szybkość

$$(D)/(T)$$

Powierzchnia

$$(D^2)$$

a połączenie tych wymiarów dla warunków $\rho V^2 S$:

$$[(M)/(D^3)][(D)/(T0]^2[D^2]$$

i zbierając wymiary w liczniku i mianowniku, otrzymujemy wzór

$$(MD^2D^2)/(D^3T^2)$$

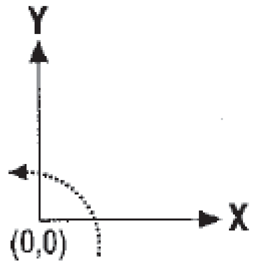
Usunięcie wymiarów , które pojawiają się w liczniku i mianowniku mamy

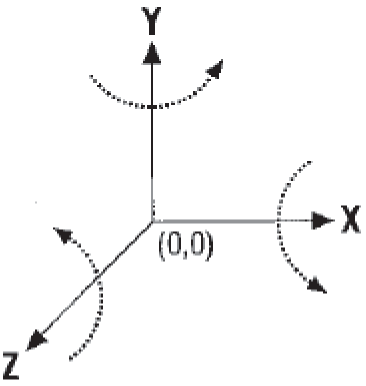
$$M(D/T^2)$$

Co jest zgodne ze wzorem pokazanym wcześniej dla oporu O_f. Ćwiczenie to również ujawnia ,że warunek empiryczny Cf dla współczynnika oporu musi być niewymiarowe.

System współrzędnych

W tekście tym będziemy się odnosić do standardowego kartezjańskiego układu współrzędnych, kiedy określamy pozycję w przestrzeni 2D lub 3D. W dwuwymiarze będziemy używać systemu współrzędnych tego typu





w którym obrót jest mierzony dodatnio przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. W trójwymiarze, użyjemy systemu współrzędnych pokazanego powyżej, w którym obrót wokół osi x jest dodatni od dodatniego y do dodatniego z, obrót wokół osi y jest dodatni od dodatniego z do dodatniego x a obrót wokół osi z jest dodatni od dodatniego z do dodatniego y.

Wektory

Zasadniczo ,wektor jest to wielkość, która ma zarówno rozmiar jak i kierunek. Przypominam, że skalar, w przeciwieństwie do wektora, ma tylko rozmiar, ale nie ma kierunku. W mechanice, wielkość taka jak siła, prędkość, przyspieszenie i pęd są wektorami, i trzeba rozpatrywać zarówno rozmiar jak i kierunek. Jednostki takie jak długość, gęstość i lepkość są skalarami. W odniesieniu do notacji, użyjemy pogrubienia dla jednostek wektorowych takich jak siła F. Kiedy odnosimy się do wielkości jednostki wektorowej, użyjemy zwykłej czcionki. Na przykład, wielkość wektora siły F , to F z elementami osi współrzędnych F_x, F_y i F_z. Cały czas będziemy używać symbolu * dla wskazywania iloczynu skalarnego wektora lub operacji iloczynu skalarnego, w zależności od kontekstu, i użyjemy symbolu ^ dla wskazania iloczynu wektorowego .Ponieważ cały czas będziemy korzystać z wektorów, trzeba sobie odświeżyć pamięć co do podstawowych działań na wektorach, takich jak dodawanie wektorów, iloczyn skalarny wektorów, iloczyn wektorowy

Masa, środek masy oraz moment bezwładności

Właściwości ciała, masa, środek masy i moment bezwładności , nazywane właściwościami masy, mają podstawowe znaczenie dla studiowania mechaniki ponieważ ruch liniowy i obrotowy ciała i odpowiedź ciała na daną siłę są funkcjami właściwości tej masy. Zatem, trzeba znać dokładny model ciała w ruchu lub móc wyliczyć te właściwości masy. Spójrzmy najpierw na kilka definicji. Generalnie, ludzie myślą o masie jako mierze ilości materii w ciele. Dla naszych celów w studiach nad mechaniką, również będziemy myśleć o masie jakie mierze oporu ciała w ruchu lub zmianie w ruchu .Zatem im większa masa ciała, tym trudniej będzie go wprawić w ruch lub zmienić jego ruch. Środek masy (zwany również środkiem ciężkości) jest punktem w ciele wokół którego masa ciała jest rozłożona równomiernie. W mechanice, środek masy jest to punkty przez który dowolna siła może działać na ciało bez wprawiania w obrót ciała. Chociaż większość ludzi zna terminy masa i środek ciężkości , termin moment bezwładności nie jest zbyt dobrze znany; jednak w mechanice jest niezmiernie ważny. Moment bezwładności masy ciała jest ilościową miarą promieniowego rozkładu masy ciała wokół danej osi obrotu Analogicznie do masy będącej miarą oporu ciała ruchu liniowego, moment bezwładności masy jest miarą oporu ciała dla ruchu rotacyjnego. Teraz znamy co oznaczają dane właściwości, teraz spójrzmy jak każdą z nich obliczyć. Dla danego ciała składającego się z wielu cząstek, całkowita masa ciała jest to po prostu suma mas wszystkich elementarnych cząstek składających się na ciało gdzie masa każdej elementarnej cząstki jest to gęstość masy razy objętość. Zakładając ,że ciało jest jednolitej gęstości, wtedy całkowita masa ciała jest to po prostu gęstość ciała razy całkowita objętość ciała. Jest to wyrażone równaniem

$$m = \int \rho dV = \rho \int dV$$

W praktyce, rzadko trzeba brać całkę objętości aby znaleźć masę ciała, zwłaszcza ,że wiele ciał jakie będziemy rozpatrywać, na przykład samochody czy planety , nie są jednolitej gęstości. Uprościmy te złożone ciała dzieląc je na znany zespół elementów ciała lub łatwo obliczalną masę i po prostu zsumujemy te masy wszystkich komponentów aby uzyskać masę całkowitą. Obliczanie środka ciężkości ciała jest trochę bardziej zawiłe. Najpierw, dzielimy ciało na nieskończoną liczbę mas elementarnych ze środkiem każdej masy określonej relatywnie do odnośnych osi układu współrzędnych. Następnie, bierzemy pierwszy moment każdej masy wokół odnośnych osi a potem dodajemy wszystkie te momenty. Pierwszy moment jest iloczynem masy razy odległość od danych osi współrzędnych od początkowego środka masy. W końcu dzielimy tą sumę momentów przez całkowitą masę ciała, otrzymując współrzędne do środka masy ciała relatywnie do odnośnych osi. Musisz wykonać te obliczenia raz dla każdego wymiaru, to znaczy, dwukrotnie kiedy pracujesz w 2D i trzy razy kiedy pracujesz w 3D. Tu mamy równania dla współrzędnych dla środka masy ciała

$$x_c = \left\{ \int x_o \, dm \right\} \Big/ m$$
$$y_c = \left\{ \int y_o \, dm \right\} \Big/ m$$
$$z_c = \left\{ \int z_o \, dm \right\} \Big/ m$$

gdzie $(x,y,z)_c$ są współrzędnymi środka masy dla ciała a $(x,y,z)_o$ to współrzędne środka masy każdej masy elementarnej. Ilości $x_o dm$, $y_o dm$ i $z_o dm$ przedstawiają pierwsze momenty masy elementarnej, dm, wokół każdej osi współrzędnych. Nie ma się co zamartwiać całkami. W praktyce założymy skończoną liczbę mas, a wzory przyjmą bardziej przyjazną postać:

$$x_c = \left\{ \sum x_o \, m \right\} \Big/ \left\{ \sum m \right\}$$
$$y_c = \left\{ \sum y_o \, m \right\} \Big/ \left\{ \sum m \right\}$$
$$z_c = \left\{ \sum z_o \, m \right\} \Big/ \left\{ \sum m \right\}$$

Pamiętaj, że możesz z łatwością zastąpić wagi dla mas w tych wzorach, ponieważ stałe przyspieszenie ziemskie g, pojawia się w obu licznikach i mianownikach a więc skreślamy z równań. Przypomnijmy ,że waga obiektu jest to masa razy przyspieszenie ze względu na przyspieszenie ziemskie g, które wynosi 9,8 m/s^2. Wzór do obliczania masy całkowitej i środka ciężkości dla systemu oddzielnych punktów masy można łatwo zapisać w notacji wektorowej.

$$m_t = \sum m_i$$

$$\mathbf{CG} = \left[\sum (\mathbf{cg_i})(m_i)\right] \Big/ m_t$$

Gdzie m_t jest to masa całkowita m_i to masa każdego punktu masy w systemie , CG jest połączonym środkiem ciężkości a cg_i jest położeniem środka ciężkości każdego punktu masy wobec współrzędnych .Zwróć uwagę, że CG i cg_i są pokazane jako wektory, ponieważ oznaczają pozycję w systemie kartezjańskim. Jest tak dla wygody , ponieważ pozwala to zająć się elementami x,y, i z (lub tylko x i y w dwóch wymiarach) za jednym zamachem. W poniższym kodzie, założymy ,że punkty masy tworzące ciało są przedstawiane jako tablica struktur w której każda struktura zawiera współrzędne punktu masy i masy. Struktura również będzie zawierała element przechowujący współrzędne punktu masy w stosunku do połączonego środka ciężkości sztywnego ciała, które będzie wyliczona później:

```
typedef  struct _PointMass
{
        float mass;
        vector designPosition;
        vector correctedPosition;
}

// Zakładamy ,że zdefiniowano _NUMELEMENTS

PointMAss Elements[_NUMELEMENTS];
```

Oto kod, który ilustruje jak obliczać całkowitą masę i połączeniu środków ciężkości tych elementów:

```
int i;
float TotalMass;
vector CombinedCG;
vector FirstMoent;

TotalMass = 0;
for (i=0; i < _NUMELEMENTS; i++)
        TotalMass+=Elements[I].mass;
```

```
FirstMoment = vector(0,0,0);

for (i=0; i<_NUMELEMENTS; i++)

{

        FirstMoment += Element[i].mass * Element[i].designPosition;

}

CombinedCG = FirstMoment / TotalMass;
```

Teraz kiedy mamy położenie środka ciężkości, możemy wyliczyć relatywną pozycję każego punktu masy:

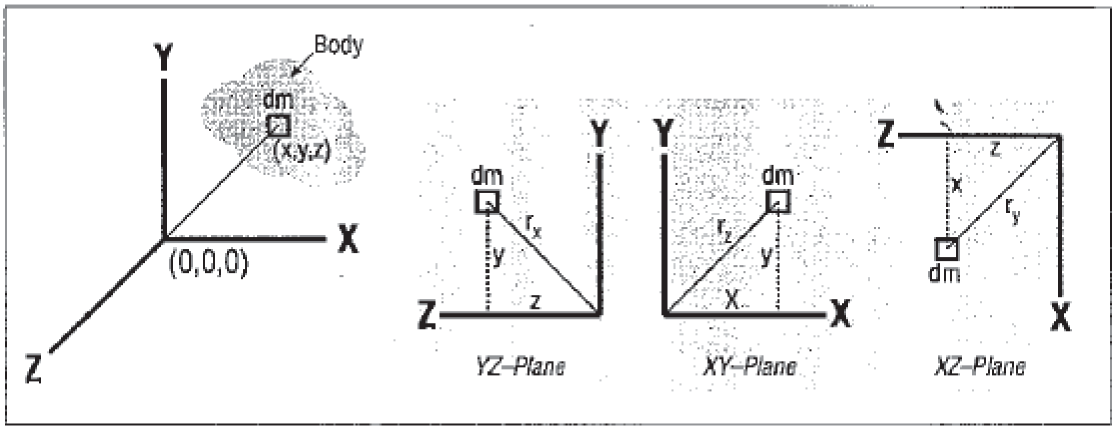
```
for (i=0; i < _NUMELEMENTS; i++)

{

        Element[i].correctedPosition= Element[i].designPosition-CombinedCG;


}
```

Aby obliczyć moment bezwładności masy , musisz wziąć drugi moment każdej mas pierwiastkowej tworzącej ciało wokół każdej osi współrzędnej. Tu dźwignia nie jest odległością do centroidu masy elementarnej wzdłuż osi współrzędnych , jak w obliczeniach środka masy; jest to prostopadła odległość od osi współrzędnej , wokół której chcemy obliczyć moment bezwładności do masy pierwiastkowej centroidu. Drugi moment jest wtedy iloczynem masy razy odległość do kwadratu. Odnosząc się do poniższego rysunku, dla dowolnego ciała w trzech wymiarach, przy obliczaniu momentu bezwładności wokół osi x, I_{xx}, ta odległość r będzie znajdowała się w płaszczyźnie yz, tak że $rx^2 = y^2 + z^2$. Podobnie, dla momentu bezwładności wokół osi y, I_{yy}, $r_y{}^2 = z^2 + x^2$, i dla momentu bezwładności wokół osi z , I_{zz} , $r_z{}^2 = x^2 + y^2$.



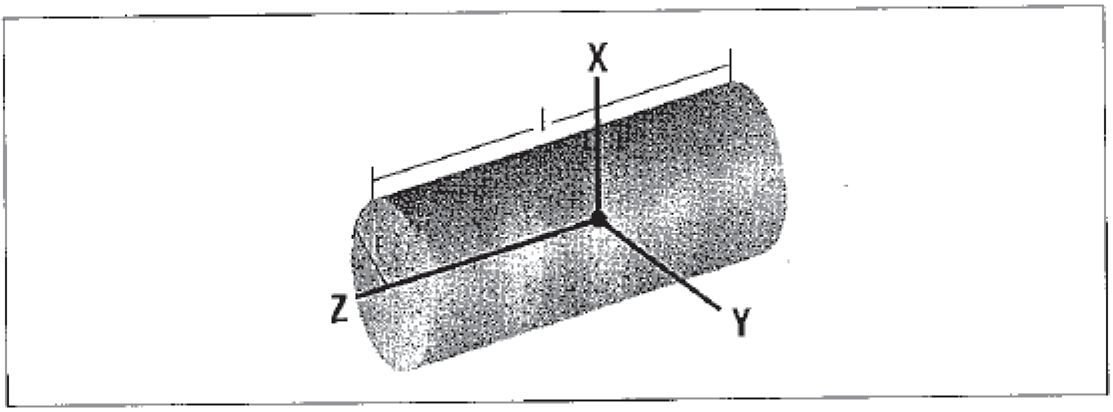
Równania dla masowego momentu bezwładności wokół osi współrzędnych 3D :

$$I_{xx} = \int r_x^2\, dm = \int (y^2 + z^2)\, dm$$
$$I_{yy} = \int r_y^2\, dm = \int (z^2 + x^2)\, dm$$
$$I_{zz} = \int r_z^2\, dm = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

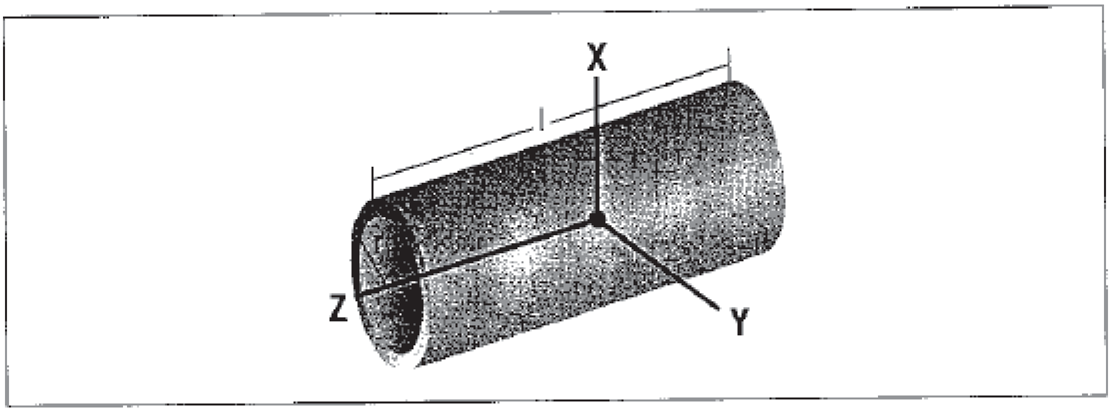
Spójrzmy na chwilę na sytuację, która powstaje w praktyce. Powiedzmy ,że mamy dany moment bezwładności I_0 ciała wokół osi, zwanej osi neutralną, przechodzącą przez środek ciężkości ciała, ale chcesz znać moment bezwładności, I , na osi o pewnej odległości, ale równoległej , do tej neutralnej osi. W tym przypadku, możesz użyć transferu osi lub twierdzenia o osi równoległej dla określenia momentu bezwładności wokół tej nowej osi. Wzór to:

$I = I_0 + md^2$

gdzie m jest masą ciała a d jest prostopadłą odległością między osiami równoległymi. Mamy tu ważną obserwację praktyczną : ten nowy moment bezwładności jest funkcją odległości oddzielającej osie kwadratowe. Oznacza to ,że w przypadku kiedy I_0 jest stosunkowo małe a d relatywnie duże, możemy bezpiecznie zignorować I_0 ponieważ wyraz md^2 będzie dominował . Musisz oczywiście użyć swego rozsądku Ten wzór dla transferu osi wskazuje również ,że moment bezwładności ciała będzie minimalny , kiedy zostanie obliczony na osi przechodzącej przez środek ciężkości ciała. Moment bezwładności ciała na jakiejkolwiek osi równoległej zawsze wzrasta o wartość md^2 przy obliczaniu wokół osi, która nie przechodzi przez środek ciężkości ciała. W praktyce, obliczenie masowego momentu bezwładności dla wszystkich najprostszych kształtów o jednolitej gęstości jest złożonym zadaniem ,więc często przybliżamy moment bezwładności ciała wkoło osi przechodzących przez jego środek masy przy użyciu prostych wzorów dla kształtów podstawowych, które przybliżają ten obiekt. Ponadto, rozbijemy złożone ciało na mniejsze komponenty i skorzystamy z faktu że I_0 może być nieistotne dla niektórych elementów, biorąc pod uwagę wkład md^2 w całkowity moment bezwładności ciała. Poniższe rysunki przedstawiają kilka prostych kształtów geometrycznych, w których można łatwo obliczyć moment bezwładności. Wzory na masowy moment bezwładności dla każdego z tych kształtów o jednorodnej gęstości wokół trzech osi współrzędnych przedstawiono pod rysunkami.

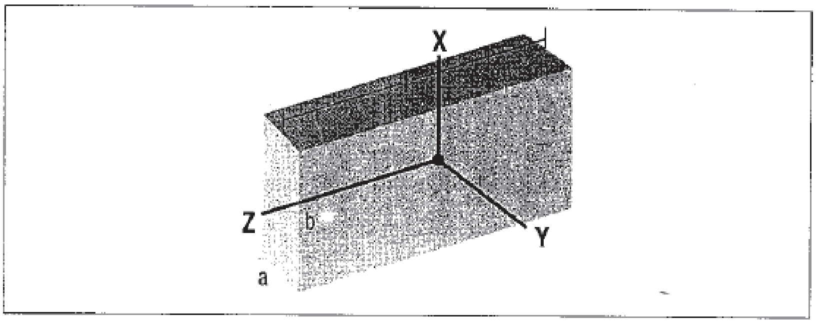


$; I_{xx} = I_{yy} = (1/4)mr^2 + (1/12)ml^2; I_{zz} = (1/2)mr^2$

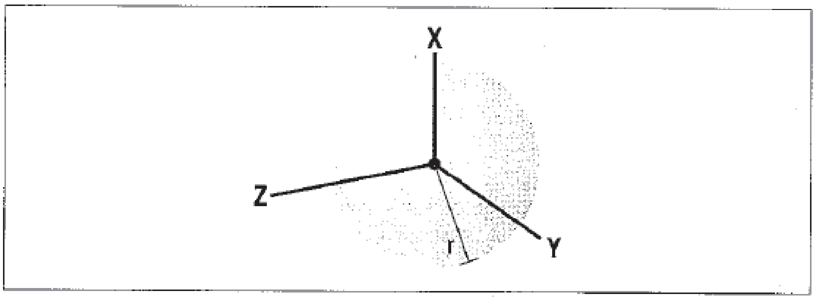


$I_{xx} = I_{yy} = (1/2)mr^2 + (1/12)ml^2; I_{zz} = mr^2$

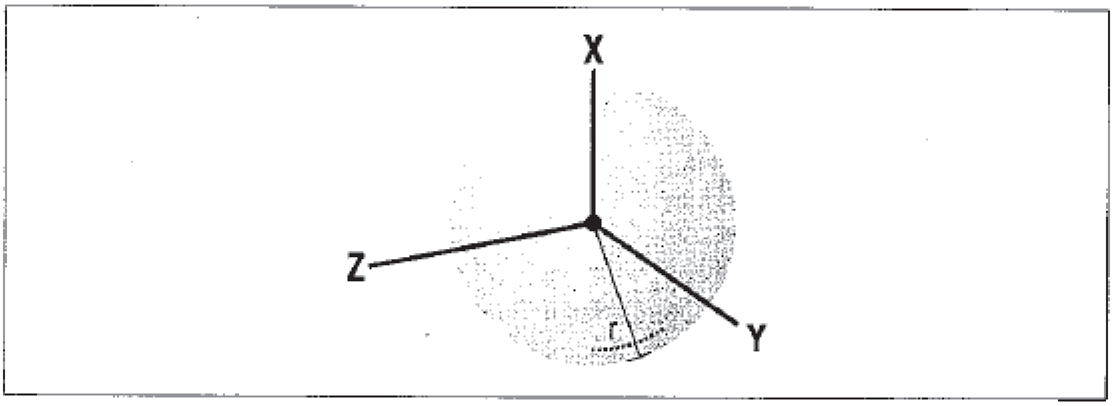
Jak widać, wzory te są stosunkowo łatwe do implementacji. Sztuczka polega na podzieleniu złożonego ciała na wiele mniejszych, prostszych reprezentatywnych geometrii, które , łączą się w przybliżeniu z własnościami bezwładności ciała złożonego



$I_{xx} = (1/12)m(a^2 + l^2);\ \ I_{yy} = (1/12)m(b^2 + l^2);\ \ I_{zz} = (1/12)$

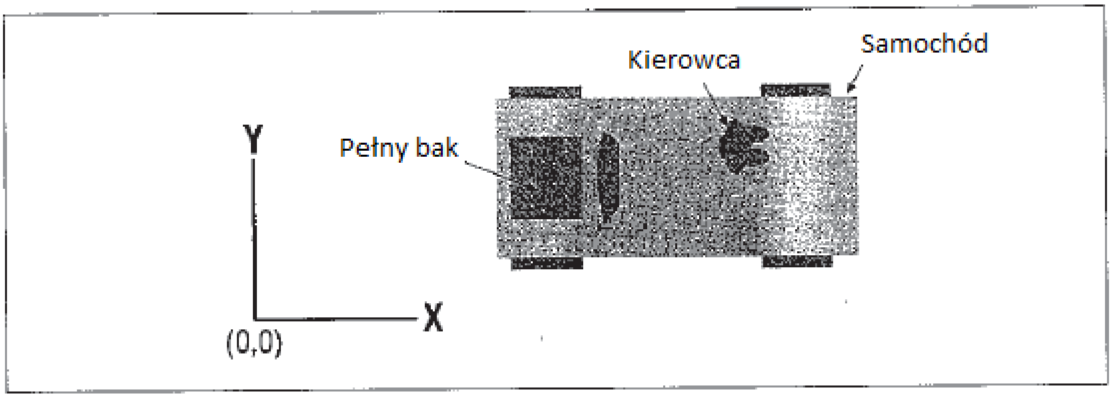


$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = (2/5)mr^2$



$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = (2/3)mr^2$

Przyjrzyjmy się prostemu przykładowi 2D demonstrującemu jak zastosować wzory omawiane w tej części. Załóżmy ,że pracujesz nad wyścigami samochodowymi w której chcesz zasymulować ducha samochodu w oparciu o dynamikę ciała sztywnego 2D. Na początku gry, auto gracza znajduje się na linii startowej, z pełnym bakiem i gotowe do startu. Po rozpoczęciu symulacji, musisz obliczyć , w stanie początkowym, właściwą masę samochodu, kierowcy i paliwa. W tym przypadku, ciało składa się z trzech elementów : samochodu, kierowcy i pełnego paliwa baku. Później, podczas gry masa tego ciała ulegnie zmianie, przy zmniejszaniu się paliwa ,czy wyrzuceniu kierowcy z auta po wypadku. Na razie kupmy się na stanie początkowym



Właściwości każdego elementu z tego przykładu podano poniżej. Należy pamiętać ,że długość jest mierzona wzdłuż osi x , szerokość jest mierzona wzdłuż osi y, a wysokość wychodzi poza . Zauważ również ,że współrzędne (x,y) do centroidu każdego składnika odnoszą się do globalnego początku

Samochód	Kierowca	Paliwo
Długość = 15,5 ft	Długość = 3 ft	Długość = 1,5 ft
Szerokość = 6 ft	Szerokość =1,5 ft	Szerokość = 3 ft
Wysokość = 4,1 ft	Wysokość = 3,5 ft	Wysokość = 1,0 ft
Waga = 3913 lb	Waga = 190 lb	Gęstośćpaliwa= 1,45 slug/ft^3
Centroid = (100,100) ft	Centroid = (103,105) ft	Centroid = (93,100) ft

Pierwszą właściwością masy jaką chcemy obliczyć jest masa ciała . Jest to proste obliczenie, ponieważ mamy już wagę samochodu, i kierowcy. Jedynym składnikiem jakiego potrzebujemy jest paliwo. Ponieważ mamy gęstość paliwa i geometrię baku, możemy wyliczyć objętość zbiornika i pomnożyć przez gęstość i przyspieszenie spowodowane grawitacją w celu uzyskania ciężaru paliwa w baku. daje to 210 funtów

$W_{fuel} = \rho vg = (1{,}45\ \text{slug/ft}^3)(1{,}5\ \text{ft})(3\text{ft})(1\ \text{ft})\ (32{,}174\ \text{ft/s}^2) = 210$ funtów

Teraz całkowita waga ciała to

$W_{total} = W_{car} + W_{driver} + W_{fuel}$: 3913 + 190 + 210 – 4317

Aby uzyskać macę ciała po prostu dzielimy wagę przez przyspieszenie ziemskie :

$M_{total} = W_{total}/g = 4317 / 32.174 = 134{,}2$ slugs

Slug to dziwnie brzmiąco jednostka, więc przechodząc na jednostki SI, otrzymujemy wagę 1958,2 kg czyli prawie 2 tony metryczne. Kolejną masową właściwością jaką chcemy jest położenie środka ciężkości ciała . W tym przykładzie obliczymy centroid w stosunku do globalnego początku i zastosujemy wzór pierwszej chwili dwukrotnie, raz dla współrzędnej x i drugi raz dla współrzędnej y

$$X_{cg\,body} = \{(x_{cg\,car})(W_{car}) + (x_{cg\,driver})(W_{driver}) + (x_{cg\,fuel})(W_{fuel})\}/\ W_{total}$$
$$X_{cg\,body} = \{(100\text{ ft})(3913\text{ lb}) + (103\text{ ft})(190\text{ lb}) + (100\text{ ft})(210\text{ lb})\}/4317\text{ lb}$$
$$X_{cg\,body} = 99.7\text{ ft}$$

$$Y_{cg\,body} = \{(y_{cg\,car})(W_{car}) + (y_{cg\,driver})(W_{driver}) + (y_{cg\,fuel})(W_{fuel})\}/\ W_{total}$$
$$Y_{cg\,body} = \{(100\text{ ft})(3913\text{ lb}) + (105\text{ ft})(190\text{ lb}) + (100\text{ ft})(210\text{ lb})\}/4317\text{ lb}$$
$$Y_{cg\,body} = 100.1\text{ ft}$$

Zauważ ,że użyliśmy wagi w tych równaniach ,zamiast mas. Pamiętaj ,że możemy zrobić to ponieważ przyspieszenie spowodowane grawitacją wbudowane w wartość wagi jest stałą i pojawia się zarówno w liczniku jak i mianowniku, co go eliminuje. Teraz czas obliczyć masowy moment bezwładności ciała. Jest to łatwe na przykładzie 2D, ponieważ mamy tylko jedną oś obrotową , i dlatego musimy wykonać obliczenia tylko raz. Pierwszym krokiem jest wyliczenie lokalnego momentu bezwładności każdego komponentu wokół własnej osi neutralnej. Biorąc pod uwagę ograniczone informacje na temat geometrii i rozkładu masy każdego komponentu, wykonamy uproszczone przybliżenie, zakładając ,że każdy komponent może być przedstawiony przez prostokątny cylinder i dlatego będziemy używać odpowiedniego wzoru na moment bezwładności. W poniższych równania, użyjemy małej litery w aby przedstawić szerokość ,aby nie mylić jej z ciężarem, dla którego używaliśmy dużej litery W

$$I_{o\,car} = (m/12)(w^2 + L^2)$$
$$I_{o\,car} = ((3913\,\text{lb}/32.174\,\text{ft/s}^2)/12)((6.0\,\text{ft})^2 + (15.5\,\text{ft})^2) = 2800\,\text{lb-s}^2\text{-ft}$$
$$I_{o\,driver} = (m/12)(w^2 + L^2)$$
$$I_{o\,driver} = ((190\,\text{lb}/32.174\,\text{ft/s}^2)/12)((1.5\,\text{ft})^2 + (3.0\,\text{ft})^2) = 5.5\,\text{lb-s}^2\text{-ft}$$
$$I_{o\,fuel} = (m/12)(w^2 + L^2)$$
$$I_{o\,fuel} = ((210\,\text{lb}/32.174\,\text{ft/s}^2)/12)((3.0\,\text{ft})^2 + (1.5\,\text{ft})^2) = 6.1\,\text{lb-s}^2\text{-ft}$$

Ponieważ są to momenty bezwładności każdego elementu wokół własnej osi neutralnej, musimy użyć teraz twierdzenia o osi równoległej do przeniesienia tych momentów do neutralnej osi ciała, która jest umieszczona w środku ciężkości ciała, który niedawno obliczyliśmy. Aby to zrobić, należy znaleźć odległość od środka ciężkości ciała do środka ciężkości każdego elementu . Odległości kwadratowe od każdego komponentu do środka ciężkości ciała:

$$d^2_{car} = (x_{cg\,car} - X_{cg})^2 + (y_{cg\,car} - Y_{cg})^2$$
$$d^2_{car} = (100\,\text{ft} - 99.7\,\text{ft})^2 + (100\,\text{ft} - 100.1\,\text{ft})^2 = 0.1\,\text{ft}^2$$
$$d^2_{driver} = (x_{cg\,driver} - X_{cg})^2 + (y_{cg\,driver} - Y_{cg})^2$$
$$d^2_{driver} = (103\,\text{ft} - 99.7\,\text{ft})^2 + (105\,\text{ft} - 100.1\,\text{ft})^2 = 34.9\,\text{ft}^2$$
$$d^2_{fuel} = (x_{cg\,fuel} - X_{cg})^2 + (y_{cg\,fuel} - Y_{cg})^2$$
$$d^2_{fuel} = (93\,\text{ft} - 99.7\,\text{ft})^2 + (100\,\text{ft} - 100.1\,\text{ft})^2 = 44.9\,\text{ft}^2$$

Teraz możemy zastosować twierdzenie o osi równoległej

$$I_{cg\,car} = I_o + md^2$$
$$I_{cg\,car} = 2800\,\text{lb-s}^2\text{-ft} + (3913\,\text{lb}/32.174\,\text{ft/s}^2)(0.1\,\text{ft}^2) = 2812\,\text{lb-s}^2\text{-ft}$$
$$I_{cg\,driver} = I_o + md^2$$
$$I_{cg\,driver} = 5.5\,\text{lb-s}^2\text{-ft} + (190\,\text{lb}/32.174\,\text{ft/s}^2)(34.9\,\text{ft}^2) = 211.6\,\text{lb-s}^2\text{-ft}$$
$$I_{cg\,fuel} = I_o + md^2$$
$$I_{cg\,fuel} = 6.1\,\text{lb-s}^2\text{-ft} + (210\,\text{lb}/32.174\,\text{ft/s}^2)(44.9\,\text{ft}^2) = 299.2\,\text{lb-s}^2\text{-ft}$$

Zwróć uwagę na stosunkowo duży udział I_{cg} dla kierowcy i paliwa ze względu na wyraz md^2 . W tym przykładzie, lokalna bezwładność kierowcy i paliwa wynosi odpowiednio tylko 2,7% i 2,1 %, odpowiednio, według odpowiadających im wyrazów md^2. Na koniec możemy uzyskać całkowity moment bezwładności ciała wokół własnej osi neutralnej przez sumowanie I_{cg} każdego komponentu

$$I_{\text{cg total}} = I_{\text{cg car}} + I_{\text{cg driver}} + I_{\text{cg fuel}}$$
$$I_{\text{cg total}} = 2812 \text{ lb-s}^2\text{-ft} + 211.6 \text{ lb-s}^2\text{-ft} + 299.2 \text{ lb-s}^2\text{-ft} = 3322.8 \text{ lb-s}^2\text{-ft}$$

Podsumowując, właściwości masy ciała , która jest kombinacją samochodu, kierowcy i pełnego baku paliwa

Właściwość	Wartość Obliczona
Całkowita masa (waga)	1958 kg
Połączone środki mas	(x,y) = (99,7 , 100,1)
Masowy moment bezwładności	3322,8 lb-s^2-ft

Ważne jest ,aby pojęcia przedstawione w tym przykładzie zostały dobrze rozumiane, ponieważ przechodząc do bardziej złożonych systemów ,a zwłaszcza ogólnego ruchu w 3D, obliczenia te, okażą się bardziej skomplikowane. Ponadto symulowany ruch ciał, jest funkcją tych właściwości masy, w tym masa będzie określała jak na ciała te wpływają siły, środek masy będzie użyty do śledzenia pozycji a masowy moment bezwładności będzie określał jak ciała te będą obracać się pod działaniem sił niecentroidalnych. Do tej pory patrzyliśmy na moment bezwładności wokół trzech osi współrzędnych w przestrzeni 3D. Jednak, wedle dynamiki ciała sztywnego 3D, ciało może obrać się wokół dowolnej osi, niekoniecznie jednej z osi współrzędnych, nawet jeśli lokalne osie współrzędnych przechodzą przez środek masy ciała. Ta komplikacja implikuje ,że musimy dodać jeszcze kilka wyrazów do naszego zbioru I , aby ciało mogło obsłużyć tą ogólną rotację.

Drugie Prawo Ruchu Newtona

Prawo to jest szczególnie interesujące w badaniach mechanik . Przypomnijmy sobie równia drugiego prawa Newtona:

F = ma

gdzie F jest siłą wywieraną na ciało, m jest masą ciała a , a jest liniowym przyspieszeniem środka ciężkości ciała. Jeśli zmienimy to równanie

F/m =a

zobaczymy ,jak masa ciała działa jako miara odporności na ruch. Należy zwrócić uwagę na to ,że wraz ze wzrostem masy w mianowniku dla stałej siły, wynikowe przyspieszenie ciała zmniejszy się. Można powiedzieć ,że ciało o większej masie zapewnia większą odporność na ruch. Podobnie jeśli masa zmniejsza się przy stałej przyłożonej siły, wynikowe przyspieszenie ciała wzrośnie i może się okazać ,że ciało o mniejszej masie zapewnia mniejszą odporność na ruch. Drugie prawo Newtona wskazuje również ,że wynikowe przyspieszenie działa w tym samym kierunku co siła wynikowa działającą na ciało; dlatego też siła i przyspieszenie muszą być traktowane jako wielkości wektorowe. Ogólnie rzecz biorąc, w danym momencie może działać więcej niż jedna siła na ciało, co oznacza ,że powstała siła jest sumą wektorową wszystkich sił działających na ciała. Zatem możemy zapisać

ΣF = ma

gdzie a reprezentuje wektor przyspieszenia

W 3D wektory siły i przyspieszenia będą miały elementy x, y i z w kartezjańskim systemie odniesienia. W tym przypadku równania składowych ruchu są zapisane tak:

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\sum F_z = ma_z$$

Alternatywnym sposobem na interpretację drugiego prawa Newtona jest to ,że suma wszystkich sił działających na ciało, jest równa tempu zmian pędu ciała w czasie, co jest pochodną pędu pod względem czasu. Pęd jest równy masie razy prędkość a ponieważ prędkość jest wielkością wektorową, zatem

G = mv

gdzie G jest liniowym pędem ciała, m jest masą ciała a v jest prędkością środka ciężkości ciała . Tempo zmian pędu jest pochodną pędu w odniesieniu do ciała

dG/dt = d/dt(mv0

Zakładając ,że masa ciała jest stała, możemy zapisać

dG/dt = m dv/dt

Zakładając ,że tempo zmian prędkości dv/dt jesy przyspieszeniem, dochodzimy do

dg/dt = ma

i

ΣF = dG/dt = ma

Do tej pory rozważaliśmy tylko translację ciała bez rotacji. W uogólnionym ruchu 3D musisz wziąć pod uwagę ruch obrotowy ciała i dlatego potrzebujesz dodatkowych równań dla pełnego opisu ruchu ciała. W szczególności, będziesz potrzebował analogicznych wzorów dotyczących sumy wszystkich pędów (momentów obrotowych) działających na ciało do tempa zmian jego momentu pędu w czasie lub pochodnej momentu pędu pod względem czasu .Zatem

$\Sigma M_{cg} = d/dt(H_{cg})$

gdzie ΣM_{cg} jest sumą wszystkich pędów wokół środka ciężkości ciała, H jest momentem pęfu ciała. M_{cg} może być wyrażone jako

$M_{cg} = r \times F$

gdzie F jest siłą działającą na ciało, r jest odległością wektorową od F, prostopadle do linii działania F, środka ciężkości ciała a x jest operatorem iloczynu wektorowego. Moment pędu ciała jest sumą momentów pędów wszystkich cząstek ciała wokół osi obrotu, która w tym przypadku zakłada przecięcie przez środek ciężkości ciała .Można to wyrazić tak:

$H_{cg} = \Sigma r_i \times m_i(\omega \times r_i)$

gdzie i przedstawia i-tą cząstką tworzącą ciało; ω jest prędkością kątową ciała wokół rozważanej osi, a (ω x r_i) jest momentem pędu i-tej cząstki, która ma wielkość (ωr_i) .Dla obrotu wokół danej osi to równanie można przepisać w postaci

$H_{cg} = \int \omega r^2 dm$

Biorąc pod uwagę, że prędkość kątowa jest taka sama dal wszystkich cząsteczek tworzących ciało sztywne mamy

$H_{cg} = \omega \int r^2 dm$

i przypominając ,że moment bezwładności I, równa się $\int r^2 dm$,mamy

$H_{cg} - I\omega$

Biorąc pochodną w odniesieniu do czasy, uzyskujemy

$dH_{cg}/dt = d/dt(I\omega) = Id\omega/dt = I\alpha$

gdzie α jest przyspieszeniem kątowym ciała wokół danej osi. W końcu możemy zapisać

$\Sigma M_{cg} = I\alpha$

Jak już wspominaliśmy mówiąc o masowym momencie bezwładności, będziemy musieli jeszcze uogólnić nasze wzory dla momentu bezwładności i momentu pędu aby uwzględnić ogólny obrót wokół dowolnej osi ciała. Generalnie, M i α są wielkościami wektorowymi, podczas gdy I będzie tensorem, ponieważ wielkość momentu bezwładności dla ciała może różnić się w zależności od osi obrotu.

Tensory

Tensor to matematyczne wyrażenie , które ma wielkość i kierunek ,ale jego wielkość może nie być unikalna, w zależności od kierunku. Tensory są zazwyczaj używane do reprezentowania materiałów kiedy te właściwości mają różne wielkości w różnych kierunkach. Materiały o właściwościach zmieniających się w zależności od kierunku są nazywane anizotropowymi (izotropowe implikuje tą samą wielkość w każdym kierunku). Na przykład, rozważmy elastyczność (lub wytrzymałość) dwóch zwykłych materiałów, zwykłego arkusza papieru i kawałek tkaniny. Weź kartkę papieru i przytrzymaj ją płasko, pociągnij ją delikatnie w przeciwnych kierunkach. Wypróbuj długość, szerokość a nawet przekątną. Zauważ ze papier wydaje się równie silny lub wytrzymały ,we wszystkich kierunkach. Jest izotropowy; dlatego wymagany jest tylko jedna stała skalarna, która reprezentuje siłę we wszystkich kierunkach, Teraz spróbuj kawałek tkaniny z prostym , stosunkowo luźnym splotem, w którym nici w jednym kierunku są prostopadłe do nici w innym kierunku. Spróbuj takiego samego naciągu jak przy kartce papieru, ciągnąc szmatkę wzdłuż każdego kierunku nici, a następnie po przekątnej. Powinieneś zauważyć ,że tkanina rozciąga się bardziej , gdy ciągnie się wzdłuż przekątnej nici, niż gdy ciągnie się ją wzdłuż biegu nici. Tkanina jest anizotropowa ponieważ wykazuje różne właściwości elastyczne (lub wytrzymałościowe) w zależności od kierunku naciągu; zatem konieczne jest zestawienie jednostek wektorowych (tensor), który będzie reprezentował wytrzymałość we wszystkich kierunkach. Właściwość jest momentem bezwładności ciała, który w 3D wymaga dziewięciu komponentów dla pełnego opisu dla dowolnej rotacji. Moment bezwładności nie jest właściwością wytrzymałościową, jak w przypadku papieru i tkaniny, ale jest to właściwość ciała , która zmienia się wraz z osią obrotu. Ponieważ wymagane jest dziewięć elementów, moment bezwładności zostanie uogólniony do postaci macierzy 3 x 3 (tensor drugorzędny)

Trzeba wspomnieć o kilku rzeczach dotyczących współrzędnych, które będą ważne przy pisaniu symulatora w czasie rzeczywistym. Obydwa równania ruchu zostały dotąd zapisane pod kątem współrzędnych globalnych a nie współrzędnych ciała stałego. Jest to w porządku dla liniowego równania ruchu, w którym możemy śledzić położenie i prędkość ciała w globalnym układzie współrzędnych. Jednak z obliczeniowego punktu widzenia nie chcemy tego robić dla kątowego równania ruchu dla ciał , które obracają się w trzech wymiarach. Powodem jest to ,że moment bezwładności, obliczany względem współrzędnych globalnych, faktycznie zmienia się w zależności od kierunku i pozycji ciała. Oznacza to ,że podczas symulacji będziesz musiał ponownie obliczyć macierz bezwładności (i jej odwrotność), co jest obliczeniowo nieefektywne. Lepiej jest przepisać równania ruchu pod kątem współrzędnych (dołączonych do ciała) lokalnych tak ,aby obliczyć macierz bezwładności (i jej odwrotności) tylko raz, na początku symulacji. Ogólnie rzecz biorąc, pochodna czasu wektora , V , w stałym (nierotującym) układzie współrzędnych jest związana z jego pochodną czasu w rotującym systemie współrzędnych przez następujące równanie:

$(dV/dt)_{fixed} = (dV/dt)_{rot} + (\omega + V)$

Wyraz $(\omega + V)$ przedstawia różnicę miedzy pochodną czasu V mierzoną w stałym układzie współrzędnych a pochodną czas u V mierzona w rotującym układzie współrzędnych. Możemy użyć tej relacji do przepisania równania kątowego ruchu w odniesieniu do współrzędnych lokalnych lub ciała stałego. Co więcej ,wektor jest rozważany jako moment pędu wektora H_{cg}. Przypomnijmy ,że $H_{cg} = I\omega$ a jej pochodna czasowa jest równa sumie momentów wokół środka ciężkości ciała. Są to fragmenty których potrzebujesz dla kątowego równania ruchu, a możesz je uzyskać przez podstawienie H_{cg} w miejsce V w relacji transformacji pochodnej jak poniżej

$\Sigma M_{cg} = dH_{cg}/dt = I(d\omega/dt) + (\omega \times (I\omega))$

gdzie momenty , bezwładność tensorowa i prędkość kątowa , wszystkie są wyrażone w lokalnych współrzędnych. Pomimo ,że to równania wygląda nieci bardziej skomplikowanie niż to pokazane wcześniej, jest to znacznie wygodniejsze w użyciu, ponieważ będę stałą podczas całej symulacji (chyba ,że Twoja masa ciała lub geometria zmieniają się z jakiegoś powodu podczas symulacji) a momenty są relatywnie łatwe do wyliczenia we współrzędnych lokalnych.

Bezwładność Tensorowa

Spójrzmy na inne równanie kątowe ruchu i zauważ ,że użyto terminu bezwładność ,sugerując ,że jest wektorem. Widzieliśmy ,że w przypadku problemów 2D,ten termin bezwładności redukuje się do ilości skalarnej reprezentującej moment bezwładności wokół pojedynczej osi obrotu. Jednak, w trzech wymiarach są trzy osie współrzędnych, wokół których ciało może się obracać. Ponadto, w uogólionych trzech wymiarach ciało może obracać się wokół dowolnej osi. Zatem dla problemu 3D,I , jest w rzeczywistości macierzą 3 x 3, tensorem drugiego rzędu. Aby zrozumieć skąd bierze się ta matryca bezwładności, musimy spojrzeć ponownie na równanie momentu pędu

$H_{cg} = \int(r \times \omega \times r)dm$

gdzie ω jest prędkością kątową ciała, r jest odległością od środka ciężkości ciała do każdej masy elementarnej, dm, a $(\omega \times r)$ jest momentem pędu dla każdej masy elementarnej. Wyraz w nawiasach nazywa się potrójnym iloczynem wektorowym i może być rozszerzone przez zastosowanie iloczynów wektorowych; r i ω są wektorami, które można zapisać tak:

$r = xi + yj + zk$

$\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$

Rozszerzmy potrójny iloczyn wektorowy

$$\mathbf{H}_{cg} = \int \{[(y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z]\mathbf{i} + [-yx\omega_x + (z^2 + x^2)\omega_y - yz\omega_z]\mathbf{j} + [-zx\omega_x - zy\omega_y + (x^2 + y^2)\omega z]\mathbf{k}\}\, dm$$

Dla uproszczenia tego równania , zastąpmy kilka wyrazów

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\, dm$$

$$I_{yy} = \int (z^2 + x^2)\, dm$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

$$I_{xy} = \mathrm{I}_{yx} = \int (xy)\, dm$$

$$I_{xz} = \mathrm{I}_{zx} = \int (xz)\, dm$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \int (yz)\, dm$$

Zastępując te I-zmienne, z których niektóre powinny wyglądać znajomo, wrócimy do rozwiniętych równań

$$\mathbf{H}_{cg} = [I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z]\mathbf{i} + [-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z]\mathbf{j} + [-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z]\mathbf{k}$$

Upraszczając ten krok dalej I będzie macierzą

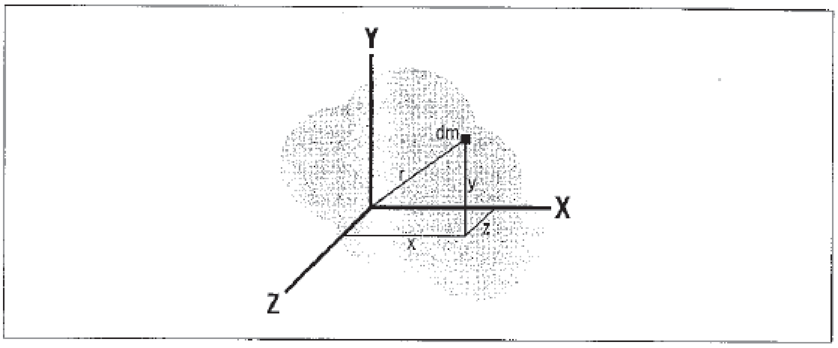
$$\begin{array}{l} \quad\quad I_{xx} - I_{xy} - I_{xz} \\ \mathbf{I} = -I_{yx}\ I_{yy} - I_{yz} - I_{zx} - I_{zy}\ I_{zz} \end{array}$$

dając poniższe równanie

$H_{cg} = I\omega$

Już wiesz ,że I przedstawia moment bezwładności, a wyrazy , które powinny ci by znane, są momentami bezwładności wokół trzech osi współrzędnych I_{xx}, I_{yy} i I_{zz}. Wyrazy te nazywamy iloczynem bezwładności

$$I_{xy} = I_{yx} = \int (xy)\, dm$$
$$I_{xz} = I_{zx} = \int (xz)\, dm$$
$$I_{yz} = I_{zy} = \int (yz)\, dm$$

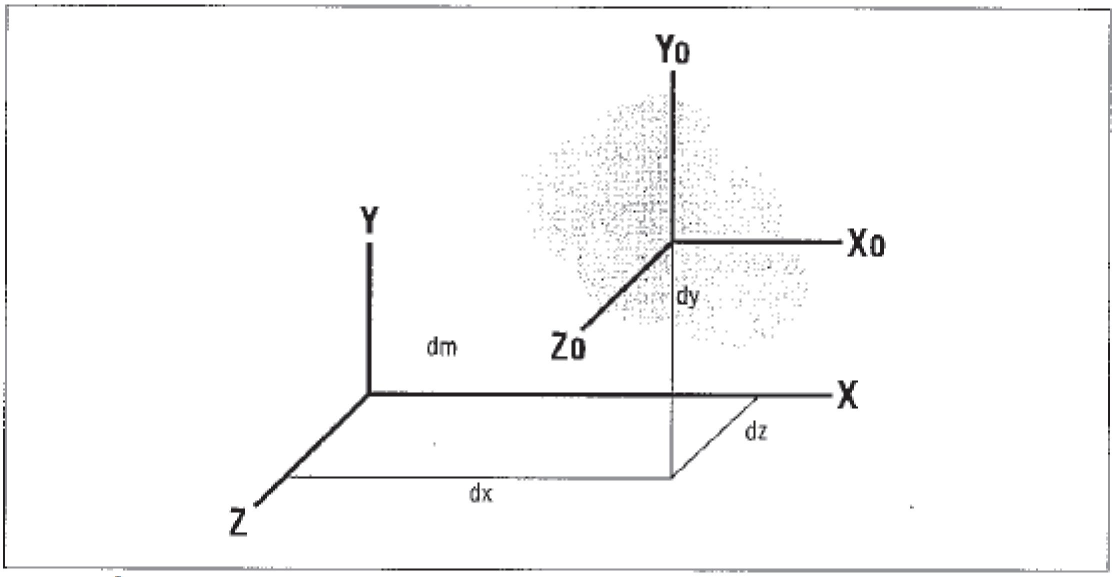


Iloczyn bezwładności

Podobnie jak twierdzenie osi równoległej, istnieje podobny transfer wzoru osi stosuje się do iloczynu bezwładności

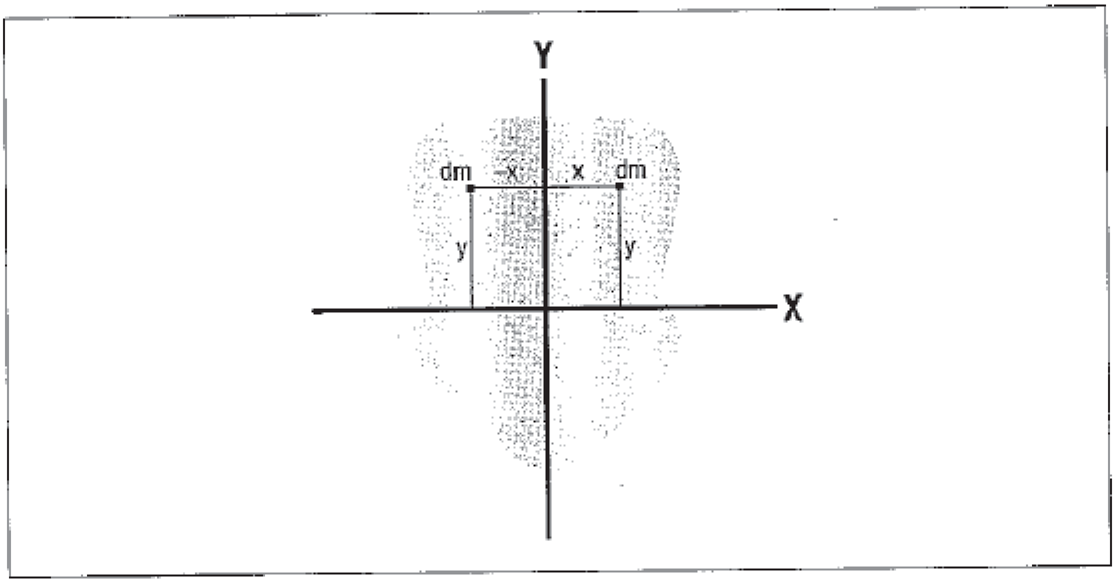
$$I_{xy} = I_{o(xy)} + md_x d_y$$
$$I_{xz} = I_{o(xz)} + md_x d_z$$
$$I_{yz} = I_{o(yz)} + md_y d_z$$

gdzie wyraz I_0 przedstawia lokalny iloczyn bezwładności, to znaczy, iloczyny bezwładności obiektu wokół osi, które przechodzą przez własne pole ciężkości, m jest masą obiektu a d są odległościami między osiami współrzędnych przechodzących przez środek ciężkości ciała i równoległy zestaw osi w tej samej odległości.



Transfer osi

Zauważ ,że nie podano żadnych wzorów iloczynów bezwładności dla prostych kształtów pokazanych wcześniej. Powód jest taki ,że dane momenty bezwładności były wokół głównych osi tych kształtów. Dla każdego ciała istnieje zbiór osi ustawionych względem ciała, tak że wyrazy iloczynu bezwładności w tensorze bezwładności są zerowe. Dla prostych geometrii pokazanych wcześniej, każda oś współrzędnych przedstawia płaszczyznę symetrii a iloczyn bezwładności zbliża się do zera wokół osi, które reprezentują symetrię płaszczyzny. Można sprawdzić to przez zbadanie iloczynu bezwładności gdzie na przykład wszystkie wyrazy (xy) w całce będą anulowane przez każdy odpowiadający wyraz –(xy) jeśli ciało jest symetryczne wokół osi y



Symetria

W przypadku ciał złożonych, jednak nie ma żadnej płaszczyzny symetrii, a orientacja głównych osi nie będzie oczywista. CO więcej, nawet możesz nie chcesz używać osi głównych jako lokalnych osi współrzędnych dla danego ciała sztywnego, ponieważ może to być niewygodne. Na przykład weźmy samolot z późniejszego przykładu, w którym będą lokalne osie współrzędnych biegnące w górę i w dół ,w stosunku do pilota, jak również w lewo i w prawo. Orientacja jest dogodna dla umiejscowienia części skrzydeł, ogona, wind itd. względem siebie, ale te osie niekoniecznie reprezentują główne osie samolotu . Wynikiem jest korzystanie z osi, które są wygodne i radzą sobie z niezerowym iloczynem bezwładności (co może być pozytywne albo negatywne). Pokazano już jak obliczyć połączone momenty bezwładności dla złożonego ciała składającego się z kilku mniejszych elementów. Rozliczanie iloczynu bezwładności postępuje wedle tej samej procedury z wyjątkiem tego ,że, typowo, elementy są takie ,że ich lokalny iloczyn bezwładności są zerowe Tak jest tylko w przypadku jeśli reprezentuje elementy według prostych geometrii takich jak masa punktowa, kule, prostokąty itp. W tym przypadku, główny wkład iloczynu bezwładności ciała sztywnego został spowodowany transferem osi dla każdego elementu. Zanim przyjrzymy się przykładowemu kodowi, najpierw zmieńmy strukturę elementów aby dołączyć nowe wyrazy dla utrzymania lokalnego momentu bezwładności elementu.

```
typedef struct _PointMass
{
      float mass;
      Vector designPosition;
      Vector correctedPosition;
      Vector localInertia;
} PointMass;
```

Tu używamy wektora do reprezentowania trzech momentów bezwładności i zakładamy ,że lokalne iloczyny bezwładności są zerowe dla każdego elementu. Poniższa próbka kodu pokazuje jak obliczać tensor bezwładności dany w elementach składowych

```
float       Ixx, Iyy, Izz, Ixy, Ixz, Iyz;
Matrix3x3   InertiaTensor;

Ixx = 0;    Iyy = 0;     Izz = 0;
Ixy = 0;    Ixz = 0;     Iyz = 0;

for (i = 0; i<_NUMELEMENTS; i++)
{
     Ixx += Element[i].LocalInertia.x +
            Element[i].mass * (Element[i].correctedPosition.y *
            Element[i].correctedPosition.y +
            Element[i].correctedPosition.z *
            Element[i].correctedPosition.z);

     Iyy += Element[i].LocalInertia.y +
            Element[i].mass * (Element[i].correctedPosition.z *
            Element[i].correctedPosition.z +
            Element[i].correctedPosition.x *
            Element[i].correctedPosition.x);

     Izz += Element[i].LocalInertia.z +
            Element[i].mass * (Element[i].correctedPosition.x *
            Element[i].correctedPosition.x +
            Element[i].correctedPosition.y *
            Element[i].correctedPosition.y);

     Ixy += Element[i].mass * (Element[i].correctedPosition.x *
            Element[i].correctedPosition.y);

     Ixz += Element[i].mass * (Element[i].correctedPosition.x *
            Element[i].correctedPosition.z);

     Iyz += Element[i].mass * (Element[i].correctedPosition.y *
            Element[i].correctedPosition.z);
}

// e11 stands for element on row 1 column 1, e12 for row 1 column 2, etc.


InertiaTensor.e11 = Ixx;
InertiaTensor.e12 = -Ixy;
InertiaTensor.e13 = -Ixz;

InertiaTensor.e21 = -Ixy;
InertiaTensor.e22 = Iyy;
InertiaTensor.e23 = -Iyz;

InertiaTensor.e31 = -Ixz;
InertiaTensor.e32 = -Iyz;
InertiaTensor.e33 = Izz;
```

Zwróć uwagę ,że tensor bezwładności jest wyliczany wokół osi, które przechodzą przez połączony środek ciężkości ciała sztywnego, więc upewnij się, że używasz właściwych współrzędnych dla każdego elementu względem połączonych środków ciężkości. Obliczenia dotyczą tensora bezwładności ciała w stałych lub lokalnych współrzędnych. Jak mówiliśmy wcześnie, lepiej jest przepisać kątowe równania ruchu pod katem lokalnych współrzędnych i używać tensora lokalnego aby trochę zaoszczędzić w symulacji czasie rzeczywistym