IV. Kinetyka

Przypomnijmy ,że kinetyka jest badaniem ruchu ciał, w tym sił, które na nie działają. Nadszedł czas aby połączyć materiał z wcześniejszych części, a mianowicie kinematykę i siły aby zbadać temat kinetyki. Omówimy kinetykę cząstek a potem omówimy kinetykę ciała sztywnego. W kinetyce , najważniejszym równanie jakie musimy rozważyć jest Drugie Prawo Newtona

$F = ma$

Kiedy zaangażowane są ciała sztywne, należy również wziąć pod uwagę , że siły działające na ciało będą miały tendencję do powodowania rotacji ciała oprócz tłumaczenia Podstawowa relacja to

$M_{cg} = I\alpha$,

gdzie M_{cg} jest sumą wektorową wszystkich momentów (momentów obrotowych) działających na ciało, I jest momentem bezwładności ciała, a a jest akceleracją kątową. Te dwa równania są nazywane równaniami ruchu. Napotkamy dwa rodzaje problemów w kinetyce. Jednym z nich mamy do czynienia gdy znasz przyspieszenie ciała lub możesz je łatwo określić za pomocą kinematyki i musisz znaleźć siły działające na to ciało. Drugi rodzaj polega na tym ,że znasz siłę działającą na ciało lub możesz ją oszacować, i musisz znaleźć związane z tym przyspieszenie ciała (a następnie jego prędkość i przemieszczenie). Oczywiście jest to drugi rodzaj problemu, który najbardziej pasuje do fizyki gier, więc będziemy to omawiać. Pozwolę sobie podkreślić , ze przy rozwiązywaniu problemów kinetycznych należy wziąć pod uwagę sumę wszystkich sił działających na ciało. Obejmują one wszystkie zastosowane siłu i wszystkie siły reakcji. Oprócz trudności obliczeniowych w rozwiązywaniu równań ruchu, jednym z trudniejszych aspektów kinetyki jest identyfikacja i właściwe uwzględnianie wszystkich tych sił. Ogólna procedura rozwiązywania interesujących nas problemów kinetycznych wygląda następująca

1. Oblicz właściwości masy ciała (masa, środek masy i moment bezwładności)
2. Identyfikuj i określ ilościowo wszystkie siły i moment działające na ciało
3. Weź sumę wektorową wszystkich sił i momentów
4. Rozwiąż równania ruchu dla przyspieszeń liniowych i kątowych
5. Scałkuj w odniesieniu do czasu, aby znaleźć prędkość liniową i kątową
6. Scałkuj ponownie w odniesieniu do czasu ,aby znaleźć liniowe i kątowe przemieszczenie

Ten szkic sprawia ,że rozwiązywanie problemów z kinetyką wydaje się łatwiejsze niż w rzeczywistości, ponieważ istnieje wiele czynników komplikujących które trzeba pokonać. Na przykład w wielu przypadkach siły działające na ciało są funkcjami przemieszczenie, prędkości lub przemieszczenia. Oznacza to ,że będziesz musiał używać iteracyjnych technik do rozwiązywania równań ruchu. Ponadto ponieważ najprawdopodobniej nie będziesz w stanie wyprowadzić rozwiązań zamkniętych dla przyspieszenia , będziesz musiał liczbowo scałkować do oszacowania prędkości i przemieszczenia w każdej analizowanej chwili czasu.

Kinetyka Cząstek w 2D

Podobnie jak w przypadku kinematyki cząstek elementarnych, w kinetyce cząstek należy uwzględnić tylko liniowy ruch cząstek. Zatem równania ruchu będą się składać z równań w postaci $F = ma$, w których ruch w każdym kierunku współrzędnej będzie miał swoje równanie. Dla ruchu dwuwymiarowego mamy

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\sum F_y = ma_y$$

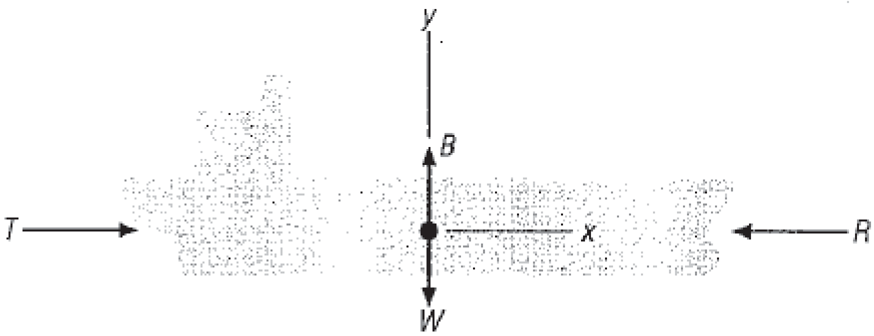
gdzie ΣF_x oznacza sumę wszystkich sił w kierunku X, ΣF_y oznacza sumę wszystkich sił w kierunku Y, a_x jest przyspieszeniem w kierunku x a a_y jest przyspieszeniem w kierunku y. Uzyskane wektory sił i przyspieszenia

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$$
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$
$$\sum \mathbf{F} = \sum F_x\mathbf{i} + \sum F_y\mathbf{j}$$
$$\sum F = \sqrt{\sum F_x^2 + \sum F_y^2}$$

Spójrzmy na prosty przykład ilustrujący. Statek pływa po wodzie, początkowo w stanie spoczynku, uruchamia swoje śmigło, generując ciąg T, który uruchamia statek poruszający się do przodu. Załóżmy ,że prędkość poruszania się statku jest wolna, a opór jego ruchu można przybliżyć następująco

R = -Cv

gdzie R jest całkowitym oporem, C jest współczynnikiem oporu, v jest prędkością statku, a znak minus wskazuje ,że ta siła oporu przeciwstawia się przedniemu obrysowi statku. Znajdźmy wzory dla prędkości statku, przyspieszenie i przebytej odległości jako funkcji czasu, zakładając ,że wektory siły ciągu i oporu siły działającej na linii działa przechodzącej przez środek ciężkości statku. (Założenie to pozwala traktować statek jako element zamiast sztywnego ciała). Pierwszym krokiem w rozwiązaniu tego problemu jest zidentyfikowanie wszystkich sił działających na statku. Na poniższym rysunku



przedstawiono schemat statku , ze wszystkimi siłami działającymi na niego siłami, mianowicie ciąg śruby, oporność R, masę statku W i pływalność B. Zauważ ,że siła wyporu jest dokładnie równa masie statku i przeciwna kierunkowi; zatem siły te znoszą się wzajemnie i nie będzie ruchu w kierunku y. Musi tak być , jeśli statek ma utrzymać się na powierzchni. Ta obserwacja skutecznie redukuje problem do jednowymiarowego problemu z ruchem w kierunku X, tylko gdy siły działające w kierunku x są naporem śruby napędowej i oporności. Teraz możemy zapisać równanie (dla ruchu w kierunku x), używając drugiego prawa Newtona w następujący sposób

$$\sum F = ma$$
$$T - R = ma$$
$$T - (Cv) = ma$$

gdzie a jest przyspieszeniem w kierunku x a v jest prędkością w kierunku x. Następnym krokiem jest wzięcie tego równanie ruchu i scałkowanie go aby wyprowadzić wzór na prędkość statku jako funkcję w czasie. Aby to zrobić, musisz dokonać zastąpienia a = dv/dt, zmienić układ, scałkować a potem rozwiązać dla prędkości jak następuje:

$$T - (Cv) = m(dv/dt)$$
$$dt = [m/(T - Cv)]\, dv$$
$$\int_0^t dt = \int_{v_1}^{v_2} [m/(T - Cv)]\, dv$$
$$t - 0 = -(-(m/C)\ln(T - Cv)\Big|_{v_1}^{v_2}$$
$$t = -(m/C)\ln(T - Cv_2) + (m/C)\ln(T - Cv_1)$$
$$t = (m/C)[\ln(T - Cv_1) - \ln(T - Cv_2)]$$
$$(C/m)t = \ln[(T - Cv_1)/(T - Cv_2)]$$
$$e^{(C/m)t} = e^{\ln[(T - Cv_1)/(T - Cv_2)]}$$
$$e^{(C/m)t} = (T - Cv_1)/(T - Cv_2)$$
$$(T - Cv_2) = (T - Cv_1)e^{-(C/m)t}$$
$$v_2 = (T/C) - e^{-(C/m)t}(T/C - v_1)$$

gdzie v_1 jest prędkością początkową statku (która jest stała) a v_2 jest prędkością statku w czasie t. v_2 to jest o co prosisz, poieważ mówi ci jak szybko statek podróżuje w danym czasie. Teraz , gdy masz równanie prędkości w funkcji, możesz wyprowadzić równanie przemieszczenia (w tym przypadku przebytej odległości) w funkcji czasu. W tym miejscu będzies musiał przywołać wzór v dt = ds, zastępując powyższą formuję dla szybkości, scałkuj, zmień kolejność i rozwiąż dla przebyetj odległości. Kroki te są przedstawione poniżej

$$v\, dt = ds$$
$$v_2\, dt = ds$$
$$(T/C) - e^{-(C/m)t}(T/C - v_1)\, dt = ds$$
$$\int_0^t (T/C) - e^{-(C/m)t}(T/C - v_1)\, dt = \int_{s_1}^{s_2} ds$$
$$(T/C)\int_0^t dt - (T/C - v_1)\int_0^t e^{-(C/m)t} dt = s_2 - s_1$$
$$\{(T/C)t + [(T/C) - v_1](m/C)e^{-(C/m)t}\}_0^t = s_2 - s_1$$
$$\{(T/C)t + [(T/C) - v_1](m/C)e^{-(C/m)t}\} - \{0 + [(T/C) - v_1\}(m/C)\} = s_2 - s_1$$
$$(T/C)t + (T/C - v_1)(m/C)e^{-(C/m)t} - (T/C - v_1)(m/C) = s_2 - s_1$$
$$s_2 = s_1 + (T/C)t + (T/C - v_1)(m/C)e^{-(C/m)t} - (T/C - v_1)(m/C)$$

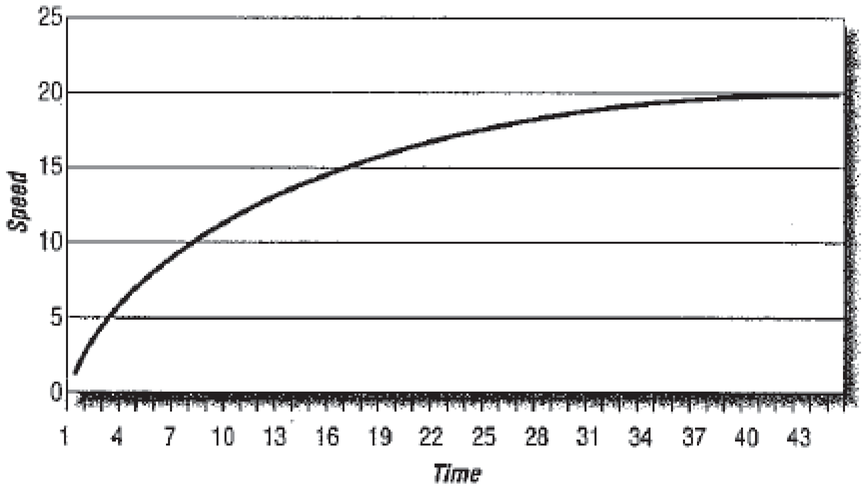
Na koniec możesz napisać równanie przyspieszenia, powracając do pierwotnego równania ruchu i rozwiązania dla przyspieszenia:

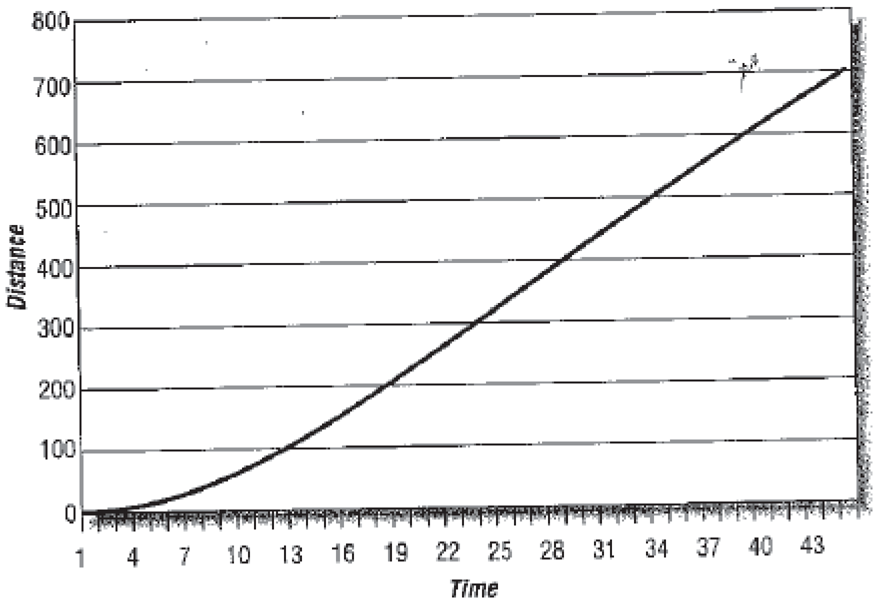
$$T - (Cv) = ma$$
$$a = (T - (Cv))/m$$
$$v = v_2 = (T/C) - e^{-(C/m)t}(T/C - v_1)$$

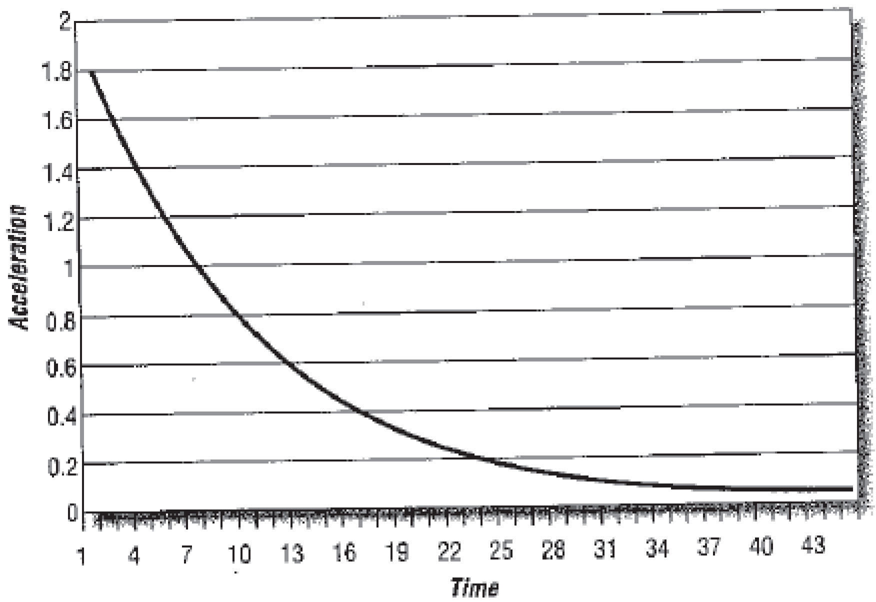
Podsumowując, równania dla prędkości, przebytej odległości i przyspieszenia są następujące:

$$v_2 = (T/C) - e^{-(C/m)t}(T/C - v_1)$$
$$s_2 = s_1 + (T/C)t + (T/C - v_1)(m/C)e^{-(C/m)t} - (T/C - v_1)(m/C)$$
$$a = [T - (Cv)]/m$$

Aby dalej ilustrować ruch statku, wyliczymy prędkość statku, przebytą odległość i przyspieszenie w funkcji czasu, jak pokazano poniżej







Założono co następuje

- Początkowa prędkość statku i przemieszczenie są zerowe w czasie zero
- Ciąg śmigła wynosi 20 000 jednostek ciągu
- Masa statku wynosi 10 000 jednostek masy
- Współczynnik oporu wynosi 1000

Zauważysz ,że prędkość statku zbliża się do prędkości ustalonej na 20 jednostek prędkości, zakładając ,,że siłą ciągu śruby pozostaje stała. Odpowiada to zmniejszeniu przyspieszenia od maksymalnego przyspieszenia w czasie zero do braku przyspieszenia po osiągnięciu stałej prędkości. Przykład ten ilustruje jak ustawi równanie różniczkowe ruchu i zintegrować je dla znajdowania prędkości, przemieszczenia i przyspieszenia. W tym przypadku, udało ci się znaleźć rozwiązanie zamknięte; oznacza to ,że udało ci się scałkować te równania aby wyprowadzić nowe. Mógłbyś to zrobić, ponieważ nałożono wystarczającą liczbę zastrzeżeń na problem, aby można było nim zarządzać. Ale możesz łatwo zauważyć , że gdyby było więcej sił działających na statek, lub jeśli ciąg nie byłby stały ale był funkcją prędkości, lub gdyby opór był funkcją prędkości do kwadratu itd. problem byłby coraz bardziej skomplikowany, sprawiając ,ze rozwiązanie w postaci zamkniętej jest bardzo trudne o ile w ogóle możliwe.

Kinetyka Cząstek w 3D

Jak w kinematyce, proste jest wykonywanie równań ruchu cząstek w trzech wymiarach. Po prostu musisz dodać jeszcze jeden komponent i otrzymasz równania jak następuje:

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\sum F_z = ma_z$$

Uzyskane wektory sił i przyspieszenia są teraz

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$
$$\sum \mathbf{F} = \sum F_x\mathbf{i} + \sum F_y\mathbf{j} + \sum F_z\mathbf{k}$$
$$\sum F = \sqrt{\sum F_x^2 + \sum F_y^2 + \sum F_z^2}$$

Wróćmy do przykładu armaty omawianego w części drugiej. W tym przykładzie dokonaliśmy kilku upraszczających założeń tak, aby móc skoncentrować się na kinematyce problemu bez jego zbytniego komplikowania. Jednym z bardziej znaczących założeń było to , że nie było oporu działającego na pociski ponieważ przelatywał on w powietrzu. Fizycznie byłoby to ważne tylko wtedy, gdy pocisk poruszałby się w próżni, co oczywiście jest mało prawdopodobne tu na Ziemi. Innym znaczącym założeniem, było to ,że nie było wiatru, który działałby na pocisk. Te dwa czynniki, opór i wiatr, są ważne w rzeczywistych problemach z pociskami, więc aby ten przykład był trochę bardziej inspirujący i trudniejszy dla użytkownika, jeśli byłaby to prawdziwa gra, dodam teraz te dwa elementy. Po pierwsze zakładamy ,że pocisk jest kulą i że siła oporu działająca na nią podczas lotu w powietrzu jest funkcją pewnego współczynnika oporu i prędkości. Ta siła oporu może być zapisana w następujący sposób:

$$\mathbf{F}_d = -C_d\mathbf{v}$$
$$\mathbf{F}_d = -C_d v_x\mathbf{i} - C_d v_y\mathbf{j} - C_d v_z\mathbf{k}$$

gdzie C_d jest współczynnikiem oporu, v jest prędkością pocisku (v_x, v_y i v_z są jej składowymi) a znak minus oznacza ,że ta siłą oporu przeciwstawia się ruchowi pocisku. Trochę tu oszukujemy , ponieważ w rzeczywistości płynny opór dynamiczny byłby bardziej funkcją prędkości do kwadratu. Zrobimy to tutaj, aby ułatwić rozwiązanie zamknięte. Po drugie, załóżmy ,że pocisk jest narażony na wiejący wiatr a siła tego wiatru na pocisk jest funkcją pewnego współczynnika oporu i prędkości wiatru. Siła ta może zostać zapisana w następujący sposób:

$$\mathbf{F}_w = -C_w\mathbf{v}_w$$
$$\mathbf{F}_w = -C_w\mathbf{v}_{wx}\mathbf{i} - C_w\mathbf{v}_{wz}\mathbf{k}$$

gdzie C_w jest współczynnikiem oporu, v_w jest prędkością wiatru a znak minus oznacza ,że ta siła przeciwstawia się ruchowi pocisku, gdy wiatr wieje w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu pocisku. Kiedy wieje wiatr z pociskiem, powiedzmy , zza niego, wtedy wiatr faktycznie pomoże pociskowi, a nie przeszkadzać jego ruchowi. Ogólnie rzecz biorąc, C_w niekoniecznie jest równe C_a pokazane we wzorze oporu. Składniki z i s siły wiatru można teraz zapisać pod względem kierunku wiatru y :

$$F_{wx} = F_w \cos\gamma = -(C_w v_w)\cos\gamma$$
$$F_{wz} = F_w \cos\gamma = -(C_w v_w)\sin\gamma$$

Na koniec zastosujemy siłę grawitacyjną do pocisku, zamiast określać efekt grawitacyjny jako stałe przyspieszenie. Pozwala to na uwzględnienie siły grawitacji w równaniach ruchu. Zakładając ,ze pocisk znajduje się stosunkowo blisko poziomu morza , siłę grawitacji można zapisać jako:

F_g = -mgj

gdzie znak minus wskazuje , że działają w ujemnym kierunku y (pociągając projekt w kierunku Ziemi) a g po prawej stronie tego równania jest przyspieszeniem z powodu grawitacji na poziomie morza. Po zidentyfikowaniu wszystkich sił możesz zapisać równania ruchu w każdym kierunku współrzędnych:

$$\sum F_x = -F_{wx} - F_{dx} = m(dv_x/dt)$$
$$\sum F_y = -F_{dy} - F_{gy} = m(dv_y/dt)$$
$$\sum F_z = -F_{wz} - F_{dz} = m(dv_z/dt)$$

Zauważ ,że dokonaliśmy zastąpienia dv/dt dla przyspieszenia w każdym równaniu. Postępując według tej samej procedury przedstawionej w poprzedniej Części, teraz trzeba zintegrować każde równanie ruchu dwukrotnie : raz aby znaleźć równanie prędkości jako funkcję czasu i ponownie znaleźć równanie przemieszczenia w funkcji czasu. Tak jak poprzednio, jak sklonować komponent przez komponent. Możesz zapytać sam siebie : „Gdzie jest siła pchająca z armaty, która napędza pocisk w pierwszej kolejności?” W tym przykładzie spoglądamy konkretnie na ruch pocisku po tym, jak opuścił on lufę działa, gdzie nie ma już siły działającej na pocisk .Aby obliczyć efekt siły armaty, która działa bardzo krótki czas   gdy pocisk znajduje się w armacie, należy wziąć pod uwagę prędkość wylotową pocisku , gdy początkowo opuszcza armatę. Składowe prędkości wylotowej w kierunkach współrzędnych będą prędkościami początkowymi w każdym kierunku i zostaną uwzględnione w równaniach ruchu po ich scałkowaniu. Prędkości początkowe pojawią się w równaniach prędkości i przemieszczenia.

Komponenty x

Pierwszym krokiem jest dokonanie odpowiednich podstawień dla wyrażeń siły w równaniu ruchu a następnie całkowania w celu znalezienia równania prędkości

$$-F_{wx} - F_{dx} = m(dv_x/dt)$$
$$-(C_w v_w \cos\gamma) - C_d v_x = m\,dv_x/dt$$
$$dt = m\,dv_x/[-(C_w v_w \cos\gamma) - C_d v_x]$$
$$\int_0^t dt = \int_{vx_1}^{vx_2} -m/[(C_w v_w \cos\gamma) + C_d v_x]\,dv_x$$
$$t = -(m/C_d)\ln[(C_w v_w \cos\gamma) + C_d v_x]\Big|_{vx_1}^{vx_2}$$
$$t = -(m/C_d)\ln[(C_w v_w \cos\gamma) + C_d v_{x_2}] + (m/C_d)\ln[(C_w v_w \cos\gamma) + C_d v_{x_1}]$$
$$(Cd/m)t = \ln\{[(C_w v_w \cos\gamma) + C_d v_{x_1}]/[(C_w v_w \cos\gamma) + C_d v_{x_2}]\}$$
$$e^{(Cd/m)t} = e^{\ln\{[(Cw\,vw\cos\gamma)+Cdvx_1]/[(Cw\,vw\cos\gamma)+Cdvx_2]\}}$$
$$e^{(Cd/m)t} = [(C_w v_w \cos\gamma) + C_d v_{x_1}]/[(C_w v_w \cos\gamma) + C_d v_{x_2}]$$
$$[(C_w v_w \cos\gamma) + C_d v_{x_2}] = [(C_w v_w \cos\gamma) + C_d v_{x_1}]e^{-(Cd/m)t}$$
$$v_{x_2} = (1/C_d)\left[e^{(-Cd/m)t}(c_w v_w \cos\gamma + C_d v_{x_1}) - (c_w v_w \cos\gamma)\right]$$

Aby uzyskać równanie dla przemieszczenia w funkcji czasu, musisz przywołać równanie v dt = ds , dokonać podstawienia dla v (używając powyższego równania), a następnie scałkować jeszcze raz

$$v_{x_2} dt = ds_x$$

$$(1/C_d)\left[e^{(-Cd/m)t}(c_w v_w \cos\gamma + C_d v_{x_1}) - (c_w v_w \cos\gamma)\right] dt = ds_x$$

$$\int_0^t (1/C_d)[e^{(-Cd/m)t}(c_w v_w \cos\gamma + C_d v_{x_1}) - (c_w v_w \cos\gamma)]\, dt = \int_{sx_1}^{sx_2} ds_x$$

$$s_{x_2} = \left\{(m/C_d)e^{(-Cd/m)t}[-(C_w v_w \cos\gamma)/C_d - v_{x_1}] - [(C_w v_w \cos\gamma)/C_d]t\right\} - \{(m/C_d)[-(C_w v_w \cos\gamma)/C_d - v_{x_1}]\} + s_{x_1}$$

Tak, te równania są brzydkie. Wyobraź sobie , że nie udało nam się uprościć założenia ,że opór jest proporcjonalny do prędkości, a nie do prędkości do kwadratu. W efekcie otrzymasz kilka naprawdę fajnych równań.

Komponenty y

W przypadku komponentów y musisz wykonać tą samą procedurę, którą pokazano wcześniej dla komponentów x, ale z odpowiednim siłami kierunku y. Oto jak wyglądają:

$$-F_{dy} - F_{gy} = m(dv_y/dt)$$

$$-(C_d v_y) - mg = m(dv_y/dt)$$

$$\int_0^t dt = -m \int_{vy_1}^{vy_1} 1/(C_d v_y + mg) dv_y$$

$$v_{y_2} = (1/C_d)e^{(-Cd/m)t}(C_d v_{y_1} + mg) - (mg)/C_d$$

Teraz , gdy mamy równanie prędkości, możecie przejść do równania przemieszczenia , tak jak poprzednio

$$v_{y_2} dt = ds_y$$

$$\left[(1/C_d)e^{(-Cd/m)t}(C_d v_{y_1} + mg) - (mg)/C_d\right] dt = ds_y$$

$$\int_0^t \left[(1/C_d)e^{(-Cd/m)t}(C_d v_{y_1} + mg) - (mg)/C_d\right] dt = \int_{sy_1}^{sy_2} ds_y$$

$$s_{y_2} = s_{y_1} + \left\{-[v_{y_1} + (mg)/C_d](m/C_d)e^{(-Cd/m)t} - t(mg)/C_d\right\} + \{(m/C_d)[v_{y_1} + (mg)/C_d]\}$$

Komponent z

Przy komponencie z otrzymamy przerwę . Zauważysz, że równania ruchu dla komponentów x i z wyglądają prawie tak samo jak wyjątkiem sytuacji , w których indeksów dolnych x i z i wyrazów sinusa i cosinusa. Wykorzystując ten fakt, możesz po prostu skopiować równania komponentu x i zamienić dolny indeks x na wyrazy z i wyrazy cosinusa za pomocą sinusa i podać tak:

$$v_{z_2} = (1/C_d)\left[e^{(-Cd/m)t}(c_w v_w \sin\gamma + C_d v_{z_1}) - (c_w v_w \sin\gamma)\right]$$

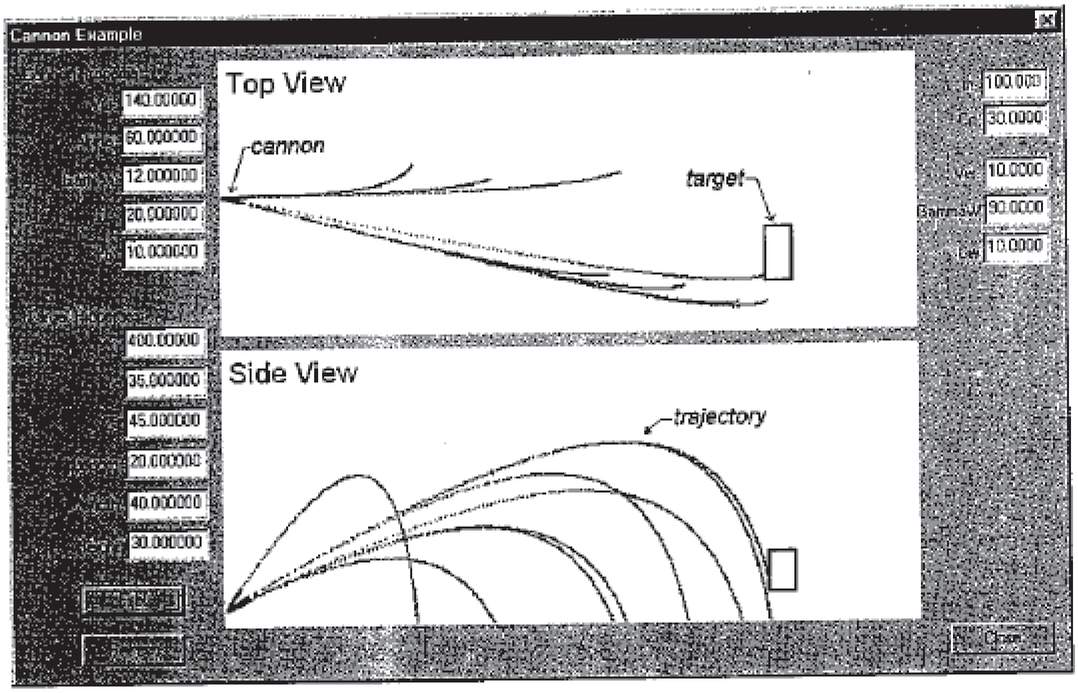
$$s_{z_2} = \{(m/C_d)e^{(-Cdm)t}[-(C_w v_w \sin\gamma)/C_d - v_{z_1}] - [(C_w v_w \sin\gamma)/C_d]t\} - \{(m/C_d)[-(C_w v_w \sin\gamma)/C_d - v_{z1}]\} + s_{z1}$$

Armata Poprawiona

Teraz, gdy mamy nowe równania dla przemieszczenia pocisku w każdym kierunku współrzędnych, możemy przejść do kodu źródłowego armaty i zastąpić stare wory obliczeń przemieszczenia nowymi. Dokonamy zmian w funkcji DoSimulation

```
//------------------------------------------------------------------------------
//
int      DoSimulation(void)
//------------------------------------------------------------------------------
//
{
     .
     .
     .

     // new local variables:
     double     sx1, vx1;
     double     sy1, vy1;
     double     sz1, vz1;

     .
     .
     .

     // Now we can calculate the position vector at this time

     // Old position vector commented out:
     //s.i = Vm * cosX * time + xe;
     //s.j = (Yb + L * cos(Alpha * 3.14/180)) + (Vm * cosY * time) -
     //   (0.5 * g * time * time);
     //s.k = Vm * cosZ * time + ze;

     // New position vector calculations:
     sx1 = xe;
     vx1 = Vm * cosX;
     sy1 = Yb + L * cos(Alpha * 3.14/180);
     vy1 = Vm * cosY;

     sz1 = ze;
     vz1 = Vm * cosZ;

     s.i = ( (m/Cd) * exp(-(Cd * time)/m) * ((-Cw * Vw * cos(GammaW * 3.14/180))/Cd

          vx1) - (Cw * Vw * cos(GammaW * 3.14/180) * time) / Cd ) -
            ( (m/Cd) * ((-Cw * Vw * cos(GammaW * 3.14/180))/Cd - vx1) ) + sx1;


     s.j = sy1 + ( -(vy1 + (m * g)/Cd) * (m/Cd) * exp(-(Cd*time)/m) -
          (m * g * time) / Cd ) + ( (m/Cd) * (vy1 + (m * g)/Cd) );

     s.k = ( (m/Cd) * exp(-(Cd * time)/m) * ((-Cw * Vw * sin(GammaW * 3.14/180))/Cd

          vz1) - (Cw * Vw * sin(GammaW * 3.14/180) * time) / Cd ) -
            ( (m/Cd) * ((-Cw * Vw * sin(GammaW * 3.14/180))/Cd - vz1) ) + sz1;
     .
     .
     .
}
```

Aby uwzględnić poprzeczny wiatr i opór, musisz dodać nowe zmienne globalne aby zapisać prędkość i kierunek wiatru, masę pocisku i współczynniki oporu. Będziesz musiał dodać kilka kontrolek w oknie dialogowym aby można było zmienić te zmienne podczas uruchamiania programu. Poniższy rysunek pokazuje w jaki sposób dodano te elementy sterujące interfejsu w prawym górnym rogu okna głównego



Zostały dodane linie do funkcji DemoDlgProc, aby obsłużyć nowe wartości prędkości i kierunku wiatru

```
//-----------------------------------------------------------------------
//
LRESULT CALLBACK DemoDlgProc(HWND hDlg, UINT message, WPARAM wParam, LPARAM lParam)
//-----------------------------------------------------------------------
//
```

```
{
      .
      .
      .
            case WM_INITDIALOG:
      .
      .
      .
                  // New variables:
                  sprintf( str, "%f", m );
                  SetDlgItemText(hDlg, IDC_M, str);

                  sprintf( str, "%f", Cd );
                  SetDlgItemText(hDlg, IDC_CD, str);

                  sprintf( str, "%f", Vw );
                  SetDlgItemText(hDlg, IDC_VW, str);

                  sprintf( str, "%f", GammaW );
                  SetDlgItemText(hDlg, IDC_GAMMAW, str);

                  sprintf( str, "%f", Cw );
                  SetDlgItemText(hDlg, IDC_CW, str);
      .
      .
      .
                        case IDC_REFRESH:
      .
      .
      .
                              // New variables:
                              GetDlgItemText(hDlg, IDC_M, str, 15);
                              m = atof(str);

                              GetDlgItemText(hDlg, IDC_CD, str, 15);
                              Cd = atof(str);

                              GetDlgItemText(hDlg, IDC_VW, str, 15);
                              Vw = atof(str);

                        GetDlgItemText(hDlg, IDC_VW, str, 15);
                        Vw = atof(str);

                        GetDlgItemText(hDlg, IDC_GAMMAW, str, 15);
                        GammaW = atof(str);

                        GetDlgItemText(hDlg, IDC_CW, str, 15);
                        Cw = atof(str);
   .
   .
   .
                  case IDC_FIRE:
   .
   .
   .
                        // New variables:
                        GetDlgItemText(hDlg, IDC_M, str, 15);
                        m = atof(str);

                        GetDlgItemText(hDlg, IDC_CD, str, 15);
                        Cd = atof(str);
```

```
        GetDlgItemText(hDlg, IDC_VW, str, 15);
        Vw = atof(str);

        GetDlgItemText(hDlg, IDC_GAMMAW, str, 15);
        GammaW = atof(str);

        GetDlgItemText(hDlg, IDC_CW, str, 15);
        Cw = atof(str);
    .
    .
    .
}
```

Po zabawie tym programem, powinieneś łatwo zauważyć ,że trajektoria pocisku jest wyraźnie różna od trajektorii uzyskanej w oryginalnym przykładzie. Dostosowując wartość prędkości wiatru , kierunku i współczynników oporu, można znacząco wpłynąć na trajektorię pocisku. Jeśli ustawisz prędkość wiatru na zero a współczynnik oporu na 1, trajektoria będzie wyglądać tal, jak uzyskano w oryginalnym przykładzie, w którym wiatr i opór nie były brane pod uwagę. Bądź jednak ostrożny; nie ustawiaj współczynnika oporu na zero, ponieważ spowoduje to błąd dzielenia przez zero. Nie wprowadzono programu obsługi wyjątków do programu, ale widać ,że stanie się tak dzięki przejrzeniu formuł wektora przemieszczenia , w których czynnik spowolnienia pojawia się w mianowniku kilku terminów. Z punktu widzenia użytkownika, jeśli była to gra wideo , problem trafienia w cel staje się znacznie trudniejszym wyzwaniem gdy wiatr i opór są brane pod uwagę. Element wiatru jest szczególnie wciągający, ponieważ podczas gry można zmieniać prędkość i kierunek wiatru, zmuszając użytkownika do uważnego obserwowania wiatru, aby precyzyjnie trafić w cel.

Kinetyka Ciał Sztywnych

Wiemy już ze studium kinematyki, że zajmowanie się ciałami stałymi dodaje ruch obrotowy lub ruch kątowy do zestawu rzeczy do rozważenia. Jak wspominaliśmy wcześniej, równania ruchu składają się teraz z zestawu równań związanych z siłami do przyspieszeń liniowych i innego zbioru równań odnoszących się do momentów przyspieszeń kątowych. Alternatywnie można myśleć o równaniach ruchu jako siłach powiązanych z szybkością zmiany pędu liniowego i momentów z prędkością zmiany momentu pędu. Podobnie jak w kinematyce, procedura radzenia sobie z problemami kinetyki ciał sztywnych obejmuje dwa różne aspekty : śledzenie translacji środka masy ciała, gdzie ciało jest traktowane jako cząstka, i śledzenie obrotu ciała, gdzie wykorzystujemy zasady lokalnych współrzędnych i względnej prędkości kątowej i przyspieszenia. Naprawdę jedyną różnicą między kinematyką ciała sztywnego i problemami kinetyki jest to ,że w problemach kinetyki mamy do rozważenia siły (w tym momencie wynikające z nich). Równania wektorowe są tu powtórzone dla wygody

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$
$$\mathbf{M}_{cg} = I\alpha$$

gdzie , w dwóch wymiarach

$$\sum \mathbf{F} = \sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j}$$
$$\sum F = \sqrt{\sum F_x^2 + \sum F_y^2}$$

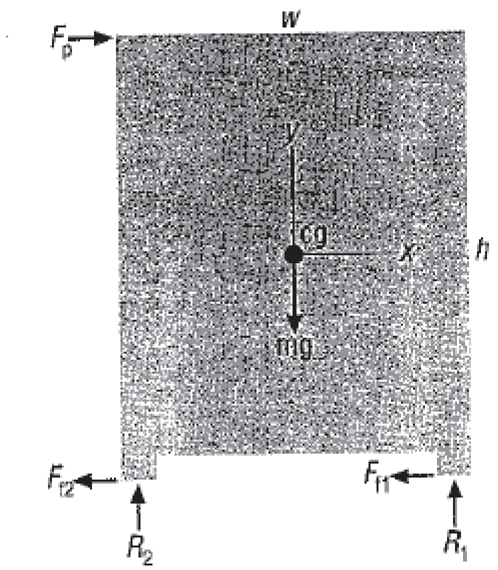
Przejście od problemów cząsteczek dwuwymiarowych , do dwuwymiarowych problemów ciał sztywnych, powoduje ,że powstaje tylko jedno dodatkowe równanie. To równanie jest oczywiście momentem równoznacznym z sumą wszystkich momentów działających na ciało z momentem bezwładności ciała i jego i jego akceleracją kątową. W ruchu płaszczyzny oś obrotu bryły sztywnej jest zawsze prostopadła do płaszczyzny współrzędnych. A ponieważ istnieje tylko jedna oś obrotu, należy rozważyć tylko jedno pojęcie bezwładności i jedno przyspieszenie kątowe. W ten sposób możesz zapisać

$$M_{cg} = I\alpha$$

gdzie M_{cg} jest całkowitym momentem i obliczany jest za pomocą formuł omawianych w części „ Moc i Moment Obrotowy" a I jest wyliczane wokół osi obrotu za pomocą technik omówionych w części „Masa, Środek Masy i Moment Bezwładności". W ich formach składowych zestaw równań ruchu dla problemów kinematyki dwuwymiarowej to

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\sum M_{cg} = I\alpha$$

Ponieważ te równania wskazują ruch liniowy na płaszczyźnie xy, przyspieszenie kątowe będzie wokół osi z prostopadłe do płaszczyzny xy. Podobnie, moment bezwładności I zostanie podjęte wokół osi x. Przypomnijmy ,że moment ten jest obliczany przez pobranie iloczynu wektorowego pozycji wektorowej dla rozważanej siły i wektora siły. Oznacza to ,że w przeciwieństwie do kinetyki cząstek elementarnych, musisz teraz dokładnie śledzić , gdzie na ciele przyłożona jest każda siła. Najlepiej zilustruje to przykład. Rozważmy pudełko o jednolitej gęstości pokazane na poniższym rysunku



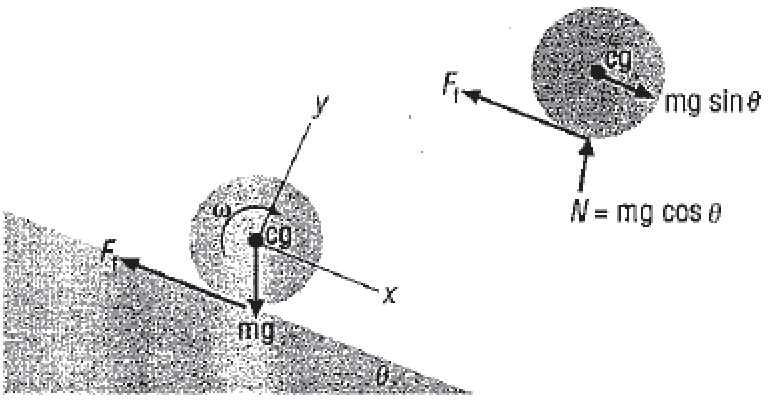
Jednolita gęstość oznacza ,że środek ciężkości znajduje się w centrum geometrycznym pudła. Znajdźmy wartość minimalnej siły, F_p , zastosowanej na górnej krawędzi pudełka, wymaganej aby rozpocząć przechylanie pudła. Na tym rysunku, F_p jest siłą przyłożoną R_1 i R_2 są siłami reakcji na podporach 1 i 2, F_{f1} i F_{f2} są siłami wynikającymi z tarcia w punktach 1 i 2 a mg jest masa pudła. Jest to przykład typu problemu, w którym wiesz coś o ruchu obiektu i musisz znaleźć wartość jednej lub więcej działających na niego sił. Aby znaleźć wartość która będzie wystarczająca do rozpoczęcia przechylania skrzyni, należy spojrzeć na moment w którym siła reakcji na podparciu 2 wynosi zero. Oznacza to ,że całą masa pudła jest teraz oparta na punkcie 1, a skrzynia zaczyna się obracać. W tej chwili, tuż przed rozpoczęciem obracania, przyspieszenie kątowe pudła wynosi zero Zwróć uwagę ,że liniowe przyspieszenie niekoniecznie musi wynosić zero, to znaczy, możesz popychać skrzynię i możesz przesuwać ją bez przechylania. Równania ruchu dla tego problemu to

$$\sum F_x = F_p = ma_x$$
$$\sum F_y = R_1 + R_2 - mg = ma_y = 0$$
$$\sum M_{cg} = F_p(h/2) + R_2(w/2) - R_1(w/2) + F_{f_2}(h/2) + F_{f_1}(h/2) = I\alpha = 0$$

Przepisanie drugiego równania (powyżej) kiedy R_2 jest zerem, pokazuje ,że R_1 jest wagą pudła. Ponadto , gdy R_2 jest zerem, wyraz R_2 (w/2) znika z równania momentu, co można przepisać przez rozwiązanie dla F_p pod względem R_1. Zwróć uwagę ,że R2 dąży do zera, podobnie jak F_{f2} . W przypadku niektórych algebr równanie wygląda następująco

$$F_p = mg(w/h) - F_{f_1}$$

Tu widać, że siła przechyłu, przyłożona do górnej krawędzi, jest proporcjonalna do ciężaru i wielkości pudełka (właściwie stosunku jego szerokości do jego wysokości), który z łatwością można ocenić z fizycznego punktu widzenia. Termin tarcie jest ważne ponieważ istnienie siły tarcia w rzeczywistości pomaga skrzyni się przechylić. Gdyby pudło znajdowało się na pozbawionej tarcia powierzchni, miałoby tendencję do przesuwania się ,a nie przechylania. Rzućmy okiem na inny przykład. Rozważ okrągły cylinder na pochyłej płaszczyźnie, jak pokazano poniżej



Jeśli cylinder zostanie ustawiony na górze płaszczyzny i zwolniony, zacznie toczyć się w dół płaszczyzny. Opracujmy równania dla liniowego przyspieszenia cylindra i prędkości kątowej, gdy toczy się on od zera. Zwróć uwagę , że cylinder będzie się toczył z powodu momentu obrotowego wytworzonego przez siłę tarcia, która rozwinęła się między cylindrem a płaszczyzną. Gdyby był to problem bez tarcia, wówczas cylinder nie zsunąłby się po płaszczyźnie po prostu ześliznąłby się w dół płaszczyzny, a jego prędkość kątowa wynosiłaby zero. W tym problemie ustawiliśmy układ współrzędnych osią x równoległą do nachylonej płaszczyzny. Sprawia to ,że równania są czystsze i pozwala skutecznie wyeliminować komponent y, ponieważ cylinder nie przesuwa się do lub od (prostopadle) płaszczyzny. Ułożenie równań ruchu w kierunku y wskazuje ,że dwie siły w kierunku y, w tym przypadku składowa ciężaru cylindra w kierunku y a siła reakcji prostopadła do płaszczyzny, są równe i przeciwne, a zatem anulują:

$$\sum F_y = mg\cos\theta - mg\cos\theta = 0$$

To było łatwe. Teraz spójrz na siły w kierunku x. Równania ruchu to

$$\sum F_x = (mg\sin\theta) - F_f = ma_x$$

gdzie F_f jest siłą spowodowaną tarciem, a_x jest liniowym przyspieszeniem (w kierunku x) środka ciężkości cylindra. Zakładając ,że cylinder toczy się bez poślizgu, siła tarcia jest równa $\mu_s N$, gdzie μ_s jest współczynnikiem tarcia statycznego, a N jest prostopadłą siła reakcji między cylindrem a płaszczyzną. Dokonanie tego zastąpienia dla Fr i rozwiązanie dla a_x:

$$(mg\sin\theta) - \mu_s N = ma_x$$
$$a_x = g(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)$$

Zauważ ,że to przyspieszenie jest stałe dla danego kąta płaszczyzny i współczynnika tarcia. Aby znaleźć prędkość kątowa, musisz zsumować wszystkie momenty (momenty obrotowe) wokół środka ciężkości, dokonać podstawienia dω/dt dla α,, scałkować i rozwiązać dla ω, prędkość kątowa:

$$\sum M_{cg} = F_f\, r = I_{cg}\alpha$$
$$F_f\, r = I_{cg}\, d\omega/dt$$
$$dt = I_c/(F_f\, r)\, d\omega$$
$$\int_0^t dt = I_{cg}/(F_f\, r) \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega$$
$$\omega_2 = [(F_f\, r)/I_{cg}]t + \omega_1$$

Można pominąć całkowanie tu przez obserwację ,że jest to problem stałego przyspieszenia i przypominanie równania $\omega_2 = \alpha t + \omega_1$.

Te dwa przykłady ilustrują bardzo ważny aspekt kinetyki ciała sztywnego : należy uwzględnić punkt zastosowania sił oprócz ich wielkości i kierunków ,aby odpowiednio uwzględnić ruch kątowy. W przypadku ruchu płaszczyzny, czyli ruchu 2D ciał sztywnych o których mowa tutaj, jesteś w stanie łatwo ustawić równania ruchu i zbadać zarówno ruch liniowy jak i kątowy ciała. W uogólnionym ruchu 3D ruch liniowy ciała sztywnego nie różni się tego cząstek; po prostu śledzisz ruch środka ciężkości. W trzech wymiarach, jednak, rotacja wokół pojedynczej osi, jak w ruchu płaszczyzny. W 3D trzeba rozważyć obrót wokół dowolnej osi, co prowadzi do pewnych trudności w reprezentowaniu dowolnych obrotów (nie będą działać kąty Eulera), a także do komplikacji określających momenty bezwładności dla obrotu wokół dowolnej osi.