V. Kolizje

Teraz, gdy rozumiesz ruch cząsteczek i sztywnych ciał, musisz zastanowić się, co się dzieje, gdy wpadną na siebie. Właśnie o tym mówimy w tej części. W szczególności pokażemy, jak radzić sobie z reakcją na kolizje cząstek i, co ciekawsze, z kolizją ciał sztywnych. Zanim przejdziemy dalej, musimy dokonać rozróżnienia między wykrywaniem kolizji a reakcją na kolizję. Wykrywanie kolizji to problem z geometrią obliczeniową polegającą na określeniu, czy i gdzie zderzyły się dwa lub więcej obiektów. Odpowiedź na kolizję jest problemem fizyki związanym z ruchem dwóch lub więcej obiektów po ich zderzeniu. Chociaż dwa problemy są ściśle związane, w tej sekcji skupimy się wyłącznie na problemie reakcji na kolizję. Muszę jednak powiedzieć, że wykrywania kolizji nie należy lekceważyć; Jest to kluczowe z każdej symulacji w czasie rzeczywistym, w której nie powinno się przenikać przez siebie. Algorytmy reakcji na kolizję polegają na wynikach algorytmów usuwania kolizji, aby dokładnie określić odpowiednią reakcję na każdą kolizję; w związku z tym należy dbać o to, aby systemy wykrywania kolizji były dokładne i niezawodne. Wykrywanie kolizji nie jest łatwym zadaniem. Osobiście uważam, że znacznie trudniej jest wprowadzić je w życie niż fizyczne aspekty symulacji sztywnych ciał. W aplikacjach do gier istotną kwestią jest także szybkość, ponieważ jestem pewien, że wykrywanie kolizji może być powolne. Ze względu na szybkość i prostotę użyję schematu obwiedni wraz ze schematami obwiedni. Traktowanie reakcji na kolizję ciała sztywnego w tej sekcji opiera się na klasycznej (newtonowskiej) zasady oddziaływania. Tu zderzające się ciała są traktowane jako sztywne, niezależnie od ich konstrukcji i materiałów. Tak jak we wcześniejszych częściach omawiane tutaj ciała sztywne nie zmieniają kształtu nawet po uderzeniu. To oczywiście jest idealizacja. Wiesz na co dzień, gdy obiekty zderzają się, wgniatają, zginają, kompresują lub gniją. Niezależnie od tej rzeczywistości opieramy się na dobrze ugruntowanych analitycznych i empirycznych metodach przybliżania zderzeń ciała sztywnego. To klasyczne podejście jest szeroko stosowane w projektowaniu maszyn, analizie i symulacjach; jednakże do symulacji na sztywnych ciałach dostępna jest inna klasa metod, zwana metodami karnymi. W metodzie kary siła uderzenia jest reprezentowana przez tymczasową sprężynę, która zostaje ściśnięta pomiędzy obiektami uderzenia. Ta sprężyna ściska się w bardzo krótkim czasie i przykłada równą i przeciwną siłę do zderzających się ciał w celu symulacji reakcji kolizji. Zwolennicy tej metody mówią, że ma ona tę zaletę, że łatwo ją wdrożyć. Jedną z trudności napotkanych w jej implementacji jest jednak stałość numeryczna. Istnieją inne argumenty za i przeciw użyciu metod kar.

Zasada Zachowania Pędu

Pęd definiuje się jako siłę działającą przez bardzo krótki czas. Na przykład siła wywierana na kulę podczas wystrzału z działa to siła impulsu. Siła zderzenia między dwoma zderzającymi się obiektami to siły impulsowe, tak jak w przypadku kopnięcia piłki nożnej lub uderzenia kijem baseballowym. Dokładniej, pęd jest wielkością wektora równą zmianie pędu. Tak zwana zasada zachowania pędu mówi, że zmiana momentu jest równa zastosowanemu impulsowi. W przypadku problemów ze stałą masą i momentem bezwładności możesz zapisać:

$$\textbf{Impuls Liniowy} = \int_{t-}^{t+} \mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-)$$

$$\textbf{Impuls Kątowy} = \int_{t-}^{t+} \mathbf{M}\,dt = \mathbf{I}(\omega_+ - \omega_-)$$

W tym równaniu F jest siłą impulsywną, M jest impulsowy moment obrotowy (lub momentem), t to czas, v to prędkość, indeks dolny – odnosi się do momentu tuż przed uderzeniem a indeks dolny + odnosi się do momentu tuż przed zderzeniem. Można obliczyć średnią siłę i moment używając następujących równań:

$$\mathbf{F} = m(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-)/(t_+ - t_-)$$
$$\mathbf{M} = \mathbf{I}(\omega_+ - \omega_-)/(t_+ - t_-)$$

Rozważmy ten prosty przykład : Pocisk o masie: Pocisk o masie 150 g wystrzeliwany jest z pistoletu przy prędkości wylotowej 2480 ft / s. Pocisk ma 0,008 s, aby przejść przez 24-calową lufę karabinu. Oblicz impuls i średnią siłę impulsywną wywieraną na kulę. W tym przykładzie masa pocisku jest stała 150 g, a jego początkowa prędkość wynosi zero; w ten sposób początkowy pęd wynosi zero. Natychmiast po wystrzale pistoletu, moment pocisku jest jego masą razy prędkość wylotowa 2480 ft / s, co daje pęd 25,5 ft / s. Impuls jest równy zmianie pędu i wynosi po prostu 25,5 ft / s. Impuls jest równy zmianie pędu i wynosi po prostu 25,5 ft / s. Średnia siła impulsu jest równa impulsowi podzielonemu przez czas użycia siły lub, w tym przypadku

Średnia siła impulsowa = (25 ft/s)/(0,0008 s)

Średnia siła impulsowa = 3187 lb

Jest to prosta, ale ważna ilustracja koncepcji impulsu, a będziesz używać tej samej zasady w przypadku działania ze zderzeniami sztywnych ciał. Podczas uderzeń siły uderzenia są zwykle bardzo wysokie, a czas uderzenia jest zazwyczaj bardzo krótki. Kiedy zderzają się dwa obiekty, każdy z nich przykłada siłę impulsu do drugiej; siły te są równe co do wielkości, ale przeciwnie do kierunku. W przykładzie z pistoletem impuls, który jest stosowany do pocisku, aby ustawić go w ruchu, jest również stosowany w kierunku przeciwnym do pistoletu, aby dać ci miły kopniak w ramię. Jest to po prostu trzecie prawo Newtona w działaniu.

Siła Uderzenia

Oprócz zasady impulsu, o której mowa w poprzednim rozdziale, nasza klasyczna analiza wpływu lub kolizji opiera się na innej podstawowej zasadzie: zasadzie zachowania dynamiki Newtona, która stwierdza, że gdy zderza się układ sztywnych ciał, zachowany jest pęd. Oznacza to, że w przypadku ciał o stałej masie, suma ich mas razy odpowiadająca ich prędkościom przed uderzeniem jest równa sumie ich mas pomnożonej przez ich odpowiednie prędkości po uderzeniu:

$$m_1 v_{1-} + m_2 v_{2-} = m_1 v_{1+} + m_2 v_{2+}$$

Tutaj m oznacza masę, v odnosi się do prędkości, indeks dolny 1 odnosi się do ciała 1, indeks dolny 2 odnosi się do ciała 2, indeks dolny - odnosi się do momentu tuż przed uderzeniem, a indeks dolny + odnosi się do chwili tuż po zderzeniu. Kluczowym założeniem tej metody jest to, że w momencie uderzenia jedyną siłą, która ma znaczenie, jest siła uderzenia; wszystkie inne siły są uważane za nieistotne w tym bardzo krótkim czasie. Zapamiętaj to założenie, ponieważ później będziemy polegać na nim podczas wdrażania reakcji kolizji w przykładowej symulacji 2D w czasie rzeczywistym. Stwierdziliśmy już, że ciała sztywne nie zmieniają kształtu podczas uderzeń, i wiesz z własnego doświadczenia, że obiekty realne zmieniają kształt podczas uderzeń. W rzeczywistości dzieje się tak, że energia kinetyczna jest przekształcana w energię odkształcenia, co powoduje deformację obiektów. Kiedy odkształcenie w obiektach jest trwałe, traci energię, a zatem energia kinetyczna nie jest zachowana.

Energia Kinetyczna

Energia kinetyczna jest formą energii związaną z poruszającym się ciałem. Energia kinetyczna jest równa energii potrzebnej do przyspieszenia ciała od odpoczynku, które jest równe energii potrzebnej do zatrzymania poruszającego się ciała. Jak można się spodziewać, energia kinetyczna jest funkcją prędkości lub prędkości ciała, a dodatkowo jego masy. Wzór na liniową energię kinetyczną jest

$$KE_{\text{linear}} = (1/2)mv^2$$

Kątowa lub obrotowa energia kinetyczna jest funkcją bezwładności i prędkości kątowej ciała:

$$KE_{\text{angular}} = (1/2)I\omega^2$$

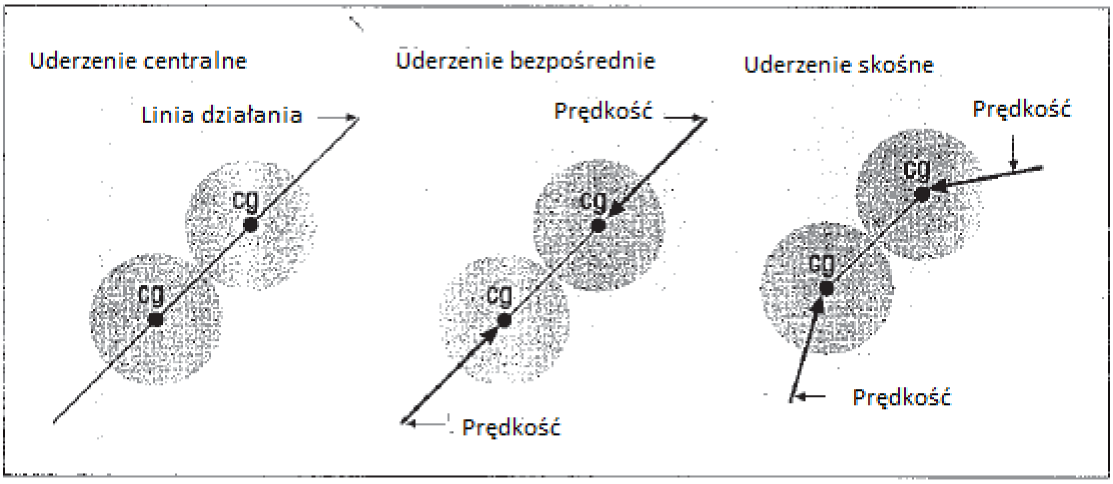
Zachowanie energii kinetycznej między dwoma zderzającymi się ciałami oznacza, że suma energii kinetycznej obu ciał przed uderzeniem jest równa sumie energii kinetycznej obu ciał po uderzeniu:

$$m_1v_{1-}^2 + m_2v_{2-}^2 = m_1v_{1+}^2 + m_2v_{2+}^2$$

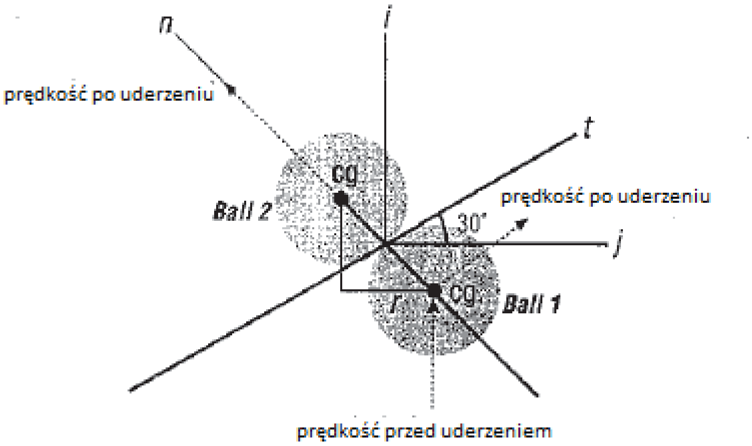
Zderzenia, które powodują straty w energii kinetycznej, są nieelastyczne lub mają charakter plastyczny. Na przykład, jeśli rzucisz dwie gliniane kulki przeciwko sobie, ich energia kinetyczna zostanie przekształcona w trwałą energię odkształcenia w glinianych kulach, a ich reakcja kolizyjna, czyli ich ruch po uderzeniu, jest mniej niż spektakularny. Jeśli zderzenie jest idealnie inelastici, wtedy dwie kulki gliny będą się trzymać ze sobą i poruszać razem z tą samą prędkością po uderzeniu. Kolizja, w której zachowana jest energia kinetyczna, nazywana jest doskonale elastyczną. W tych zderzeniach suma energii kinetycznej wszystkich obiektów przed uderzeniem jest równa sumie energii kinetycznej wszystkich obiektów po uderzeniu. Dobrym przykładem uderzeń sprężystych (choć nie idealnie elastycznych) jest zderzenie dwóch kulek bilardowych, w których odkształcenie piłki jest znikome i na pewno nie trwałe w normalnych warunkach. Oczywiście, w rzeczywistości uderzenia są gdzieś pomiędzy idealnie elastyczną i doskonale nieelastyczną. Oznacza to, że w przypadku ciał sztywnych, które w ogóle nie zmieniają kształtu, będziemy musieli oprzeć się na relacji empirycznej, aby określić stopień elastyczności wpływu (ów), który próbujemy zasymulować. Relacja, której będziemy używać, to stosunek względnej prędkości rozdzielania do względnej prędkości zbliżania się obiektów zderzających się:

$$e = -(v_{1+} - v_{2+})/(v_{1-} - v_{2-})$$

Tutaj e jest znany jako współczynnik restytucji i jest funkcją materii, konstrukcji i geometrii obiektów zderzających się. Ten współczynnik można eksperymentalnie określić dla konkretnych scenariuszy wpływu, na przykład kolizji pomiędzy baseballem a kijem lub klubem golfowym i bali. W przypadku doskonale nieelastycznych zderzeń e wynosi zero; i dla doskonale elastycznych zderzeń, e wynosi 1. Dla zderzeń, które nie są ani doskonale nieelastyczne, ani doskonale sprężyste, e może być dowolną wartością od zera do 1. Pod tym względem rozważane prędkości są zgodne z kierunkiem działania zderzenia. W zderzeniach bez tarcia linia oddziaływania uderzenia jest linią prostopadłą (normal) do powierzchni zderzających się. Kiedy prędkość ciał jest wzdłuż linii oddziaływania, mówi się, że uderzenie jest bezpośrednie. Gdy linia działania przechodzi przez środek masy ciał, kolizja jest uważana za centralną. Cząstki i sfery dystrybucji masy zawsze doświadczają oddziaływania centralnego. Bezpośrednie uderzenie centralne występuje, gdy linia działania przechodzi przez masy zderzających się ciał, a ich prędkość jest wzdłuż linii działania. Kiedy prędkości ciał nie są zgodne z kierunkiem działania, uderzenie jest "id by być ukośne." Możesz analizować skośne uderzenia w zakresie współrzędnych składowych, gdzie element równoległy do linii działania doświadcza uderzenia, ale komponent Prostopadle do linii działania nie ma, rysunek 5-1 ilustruje te oddziaływania



Jako przykład , rozważmy przykład zderzenie między dwoma kulami bilardowymi



Obie kule mają standardową średnicę 2,25 cala, i waży 5.5 uncji. Obie kulki mają standardową średnicę 2,25 cala, a każda waży 5,5 uncji. Załóżmy, że kolizja jest niemal idealnie elastyczna, a współczynnik restytucji wynosi 0,9. Jeśli prędkość kulki 1, gdy uderza kulą 2, wynosi 20 ft/s w kierunku X , jak pokazano na powyższym rysunku, obliczyć prędkości obu kulek po zderzeniu, zakładając, że jest to kolizja bez tarcia. Pierwszą rzeczą, którą musisz zrobić, to rozpoznać, że linia oddziaływania uderzenia jest wzdłuż linii łączącej środki ciężkości obu kulek, które, ponieważ są to kule, są również normalne dla obu powierzchni. Następnie można zapisać normalny wektor jednostki w następujący sposób:

$$\mathbf{n} = \left(\sqrt{\left((2r)^2 - r^2\right)}\mathbf{i} - r\mathbf{j}\right)/|\mathbf{n}|$$

$$\mathbf{n} = (0.864)i - (0.5)j$$

gdzie n jest jednostką wektora normalnego, r jest promieniem kulki i oraz j jest reprezentacją wektorów jednostkowych odpowiednio w kierunku x i y. Teraz, gdy masz linię akcji kolizji lub normalnego wektora jednostki, możesz obliczyć względną normalną prędkość między kulami w momencie kolizji:

$$v_{rn} = [\mathbf{v}_{1-} - \mathbf{v}_{2-}] \cdot \mathbf{n}$$

$$v_{rn} = [(20\ \text{ft/s})\mathbf{i} + (0\ \text{ft/s})\mathbf{j}] \cdot [(0.864)\mathbf{i} - (0.5)\mathbf{j}]$$

$$v_{rn} = 17.28\ \text{ft/s}$$

Zauważ tutaj, że skoro kulka 2 jest początkowo w spoczynku, v2- wynosi zero. Teraz możesz zastosować zasadę zachowania dynamiki w normie! kierunek w następujący sposób:

$$m_1 v_{1n-} + m_2 v_{2n-} = m_1 v_{1n+} + m_2 v_{2n+}$$

Zwracając uwagę, że m_1 jest równe m_2, ponieważ kulki są identyczne, a V_{2n-} jest zerowe, a następnie rozwiązuje się z wydajnością V_{1n+}

$$v_{1n+} = v_{1n-} - v_{2n+}$$

Aby faktycznie rozwiązać te prędkości, musisz użyć równania dla współczynnika restytucji i uczynić substytucję dla V_{1n-} · Wtedy będziesz w stanie rozwiązać V_{2n+} · Oto jak postępować:

$$e = (-v_{1n+} + v_{2n+})/(v_{1n-} - v_{2n-})$$
$$e v_{1n-} = -(v_{1n-} - v_{2n+}) + v_{2n+}$$
$$v_{2n+} = v_{1n-}(e + 1)/2$$
$$v_{2n+} = (17.28 \text{ ft/s})(1.9)/2 = 16.43 \text{ ft/s}$$

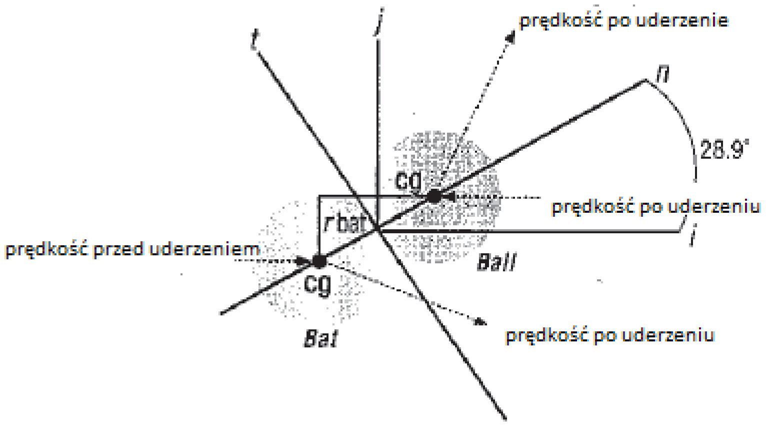
Wykorzystanie tego wyniku i wzoru dla V_{1n+} daje

$$v_{1n+} = 17.28 \text{ ft/s} - 16.42 \text{ ft/s} = 0.86 \text{ ft/s}$$

Ponieważ zderzenie jest bez tarcia, nie ma żadnego impulsu działającego w kierunku stycznym. Oznacza to, że pęd jest również zachowywany w tym kierunku i że końcowa prędkość znaczeniowa piłki równa jest jej początkowej prędkości stycznej, która w tym przypadku jest równa 10 ft / s (to jest równa (20 ft / s) sin 30 ") Ponieważ kulka 2 nie ma początkowej prędkości stycznej, jej prędkość po uderzeniu jest wyłącznie w normalnym kierunku, a przekształcenie tych wyników z powrotem na współrzędne xy zamiast normalnych i stycznych daje następujące prędkości dla każdej piłki po uderzeniu:

$$v_{2+} = (16.42 \text{ ft/s}) \sin 60° \mathbf{i} - (16.42 \text{ ft/s}) \cos 60° \mathbf{j}$$
$$v_{1+} = [(0.86 \text{ ft/s}) \cos 30° + (10 \text{ ft/s}) \sin 30°]\mathbf{i}$$
$$+ [(-0.86 \text{ ft/s}) \sin 30° + (10 \text{ ft/s}) \cos 30°)]\mathbf{j}$$
$$v_{1+} = (5.43 \text{ ft/s})\mathbf{i} + (8.23 \text{ ft/s})\mathbf{j}$$

Aby dokładniej zilustrować zastosowanie tych zasad reakcji na kolizję, rozważmy inny przykład, tym razem zderzenie z kijem baseballowym i baseballem, jak pokazano na rysunku



Do rozsądnego stopnia dokładności ruch kijem bejsbolowym w momencie kolizji można określić jako niezależny od pałkarza; to znaczy, można założyć, że kij porusza się swobodnie i obraca wokół punktu znajdującego się blisko końca rękojeści. Przypuśćmy, że piłka uderza kij w słodkim miejscu, czyli punkcie w pobliżu środka uderzeń. Dalej zakładamy, że kij jest wbity w płaszczyznę poziomą i że baseball podróżuje w płaszczyźnie poziomej, gdy uderza kij ma standardowe wymiary i maksymalną średnicę 2,75 cala oraz wagę 36 uncji .Kula ma również standardowe wymiary z promieniem 1,47 cala i masą 5,125 uncji . Piłka osiąga prędkość 132 ft / s (90 mph) w momencie uderzenia kijem, a prędkość uderzenia nietoperza w punkcie uderzenia wynosi 103 ft / s (70,2 mph) W tych zderzeniach współczynnik restytucji wynosi 0,46 .W milisekundach zderzenia baseball trochę się kompresuje, jednak w tej analizie zakładamy, że zarówno kij, jak i piłka są sztywne, jest bez tarcia. Tak jak w poprzednim przykładzie, linia oddziaływania uderzenia jest wzdłuż linii łączącej środki ciężkości kija i piłki; w związku z tym normalnym wektorem jednostkowym jest

$$\mathbf{n} = \left(\sqrt{((r_1 + r_2)^2 - r_1^2)}\mathbf{i} - r_1\mathbf{j}\right)/|\mathbf{n}|$$

$$\mathbf{n} = (0.875)\mathbf{i} + (0.484)\mathbf{j}$$

Tutaj indeksy dolne 1 i 2 oznaczają kij i piłkę, odpowiednio. Względna normalna prędkość pomiędzy kijem i piłką to

$$v_{rn} = [\mathbf{v}_{1-} - \mathbf{v}_{2-}] \cdot \mathbf{n}$$

$$v_{rn} = [(235\text{ ft/s})\mathbf{i} + (0\text{ ft/s})\mathbf{j}] \cdot [(0.875)\mathbf{i} - (0.484)\mathbf{j}]$$

$$v_{rn} = 205.6\text{ ft/s}$$

Składniki prędkości kija i piłki w normalnym kierunku to

$$v_{1n-} = v_{1-} \cdot \mathbf{n} = 90.125\text{ ft/s}$$

$$v_{2n-} = v_{2-} \cdot \mathbf{n} = -115.5\text{ ft/s}$$

Zastosowanie zasady zachowania pędu w normalnym kierunku i rozwiązywania dla wydajności v_{1n+} to

$$m_1 v_{1n-} + m_2 v_{2n-} = m_1 v_{1n+} + m_2 v_{2n+}$$

$$(0.07\text{ slug})(90.125\text{ ft/s}) + (9.96 \times 10^{-3}\text{ slug})(-115.5\text{ ft/s})$$

$$= (0.07\text{ slug})v_{1n+} + (9.96 \times 10^{-3}\text{ slug})v_{2n+}$$

$$v_{1n+} = 73.691\text{ ft/s} - (0.142\text{ ft/s})v_{2n+}$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, stosując wzór dla współczynnika restytucji z powyższym wzorem dla wydajności V_{1n+} to

$$e = (-v_{1n+} + v_{2n+}/(v_{1n-} - v_{2n-})$$

$$0.46 = [-73.691\text{ ft/s} + (0.142\text{ ft/s})v_{2n+} + v_{2n+}/([90.125\text{ ft/s} + 115.5\text{ ft/s})$$

$$v_{2n+} = 147.34\text{ ft/s} \quad \text{i} \quad v_{1n+} = 52.77\text{ ft/s}$$

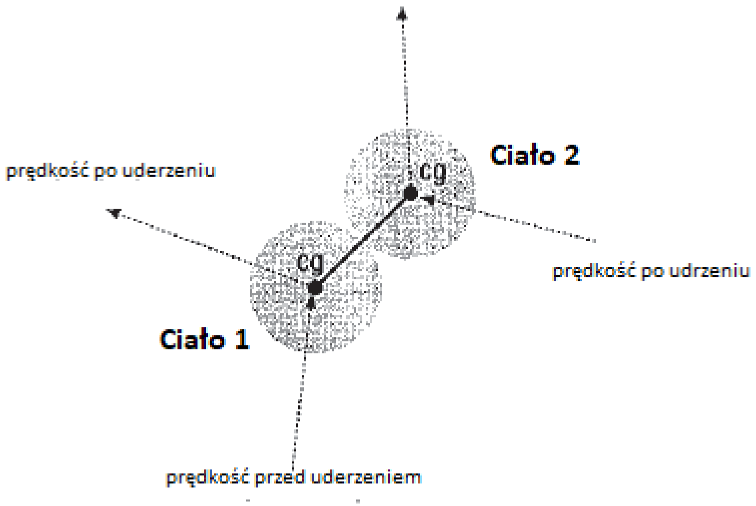
Ponownie, ponieważ ten wpływ jest bez tarcia, każdy obiekt zachowuje swój oryginalny składnik prędkości stycznej. Dla kija ten składnik wynosi 49,78 ft / s; dla piłki jest to -63.8 ft / s. Przyjmowanie tych normalnych i stycznych komponentów i przekształcanie ich w koordynaty współrzędnych daje następujące prędkości nietoperza i kulki natychmiast po uderzeniu:

$$\mathbf{v}_{1+} = 70.25\mathbf{i} - 18\mathbf{j}$$
$$\mathbf{v}_{2+} = 98.2\mathbf{i} + 127\mathbf{j}$$

Oba te przykłady ilustrują fundamentalną analizę wpływu, stosując klasyczne podejście. Mają także wspólne ważne założenie: skutki są bezstratne. W rzeczywistości wiesz, czat piłki bilardowe i baseballe i nietoperze zderzają się z tarciem.

Liniowy I Kątowy Impulse

W poprzedniej części można było ręcznie przeanalizować konkretne przykłady, stosując zasadę zachowania pędu i współczynnik restytucji. Takie podejście wystarczy, jeśli piszesz gry, w których zdarzenia kolizyjne są dobrze zdefiniowane i przewidywane. Jeśli jednak tworzysz symulację w czasie rzeczywistym, w której obiekty, w szczególności sztywne kształty o dowolnym kształcie, mogą, ale nie muszą, zderzać się, wtedy będziesz chciał użyć więcej rodzajów podejść. Takie podejście wymaga użycia formuł do obliczenia rzeczywistego impulsu pomiędzy zderzającymi się obiektami, aby można było zastosować ten impuls do każdego obiektu, natychmiast zmieniając jego prędkość. W tej sekcji wyprowadzimy równania dla impulsu, zarówno liniowego, jak i kątowego. W radzeniu sobie z cząsteczkami lub kulami, jedyną formułą impulsową, którą będziesz potrzebować, jest ta dla impulsu liniowego, która pozwoli ci obliczyć nowe prędkości liniowe. obiekty po zderzeniu. Tak więc pierwszą formułą, którą dla was wyprowadzimy, jest ta dla liniowego impulsu pomiędzy dwoma zderzającymi się obiektami, jak pokazano na rysunku



Na razie załóżmy, że kolizja jest bez tarcia i linia działania impulsu jest wzdłuż linii łączącej centra masy dwóch obiektów. Linia ta jest normalna do powierzchni obu obiektów. Aby wyprowadzić wzór na impuls liniowy, należy wziąć pod uwagę formułę z definicji impulsu wraz ze wzorem współczynnika restytucji. Tutaj, niech J reprezentuje impuls:

$$J = m(v_+ - v_-)$$
$$e = -(v_{1+} - v_{2+})/(v_{1-} - v_{2-})$$

W tych równaniach są to prędkości wzdłuż linii oddziaływania uderzenia, które w tym przypadku jest linią łączącą centra masy dwóch obiektów. Ponieważ ten sam impuls dotyczy każdego obiektu, tylko w przeciwnych kierunkach, masz faktycznie trzy równania do rozwiązania:

$$J = m_1(v_{1+} - v_{1-})$$
$$-J = m_2(v_{2+} - v_{2-})$$
$$e = -(v_{1+} - v_{2+})/(v_{1-} - v_{2-})$$

Zauważcie, że to działa pozytywnie na ciało 1 i że jego negacja, -] działa na ciało 2. Zauważ również, że istnieją trzy niewiadome w tych równaniach: impuls i prędkości obu ciał po uderzeniu. Ponieważ istnieją trzy równania i trzy niewiadome, możesz odważyć się na każdą nieznaną przez przestawienie dwóch równań impulsu i zastąpienie ich równaniem przez e. Po pewnej algebrze otrzymasz wzór na], który możesz następnie wykorzystać do określenia prędkości każdego ciała tuż po zderzeniu. Oto, jak to jest klon:

Dla Ciała 1 : $v_{1+} = J/m_1 + v_{1-}$

Dla Ciała 2 : $v_{2+} = -J/m_2 + v_{2-}$

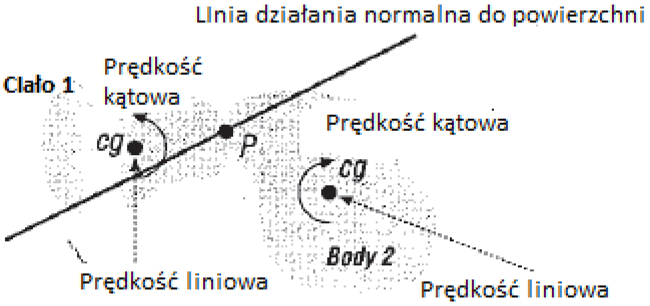
Zastępując v_{1+} i v_{2+} w równaniu dla e

$$e(v_{1-} - v_{2-}) = -[(J/m_1 + v_{1-}) - (-J/m_2 + v_{2-})]$$
$$e(v_{1-} - v_{2-}) + v_{1-} - v_{2-} = -J(1/m_1 + 1/m_2)$$

Ponieważ linia działania jest normalna do powierzchni zderzających, v_r jest względną prędkością wzdłuż linii oddziaływania uderzenia, a J działa wzdłuż linii oddziaływania uderzenia, która w tym przypadku jest normalna dla powierzchni, jak już wspomniano. Teraz, gdy masz już formułę impulsu, możesz użyć definicji impulsu wraz z tą formułą do obliczenia zmiany prędkości liniowej obiektów uczestniczących w uderzeniu. Oto jak to jest klon w przypadku kolizji dwóch obiektów:

$$v_{1+} = v_{1-} + (J\mathbf{n})/m_1$$
$$v_{2+} = v_{2-} + (-J\mathbf{n})/m_2$$

Zauważ, że dla drugiego obiektu stosuje się ujemną wartość impulsu, ponieważ działa on na oba obiekty jednakowo, ale w przeciwnych kierunkach. Gdy mamy do czynienia ze sztywnymi ciałami, które się obracają, trzeba będzie wyprowadzić nowe równanie impulsu obejmujące efekty kątowe. Użyjesz tego impulsu do obliczenia nowych prędkości liniowych i kątowych obiektów tuż po uderzeniu. Rozważ dwa obiekty zderzające się w punkcie P, jak pokazano na rysunku



Istnieje zasadnicza różnica między tą kolizją a tą omówioną wcześniej. W tym przypadku prędkość w punkcie połączenia na każdym ciele jest funkcją nie tylko prędkości liniowej obiektów, ale także ich prędkości kątowych, a będziesz musiał przywołać następującą formułę do obliczenia prędkości w punkcie uderzenia na każdym ciele :

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_g + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

W tej relacji r jest wektorem od środka ciężkości ciała do punktu P. Za pomocą tej formuły można przepisać dwie formuły odnoszące się liniowej prędkości po uderzeniu do impulsu i prędkości początkowej w następujący sposób:

$$\textbf{Dla ciała 1} \quad \mathbf{v}_{1g+} + (\boldsymbol{\omega}_{1+} \times \mathbf{r}_1) = \mathbf{J}/m_1 + \mathbf{v}_{1g-} + (\boldsymbol{\omega}_{1-} \times \mathbf{r}_1)$$
$$\textbf{Dla ciała 2} \quad \mathbf{v}_{2g+} + (\boldsymbol{\omega}_{2+} \times \mathbf{r}_2) = -\mathbf{J}/m_2 + \mathbf{v}_{2g-} + (\boldsymbol{\omega}_{2-} \times \mathbf{r}_2)$$

Istnieją dwa. dodatkowe niewiadome tutaj, prędkości kątowe po uderzeniu, co oznacza czat, potrzebujesz dwóch dodatkowych równań. Te równania można uzyskać z definicji impulsu kątowego:

$$\text{Dla ciała 1}: \quad (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{J}) = \mathbf{I}_1(\boldsymbol{\omega}_{1+} - \boldsymbol{\omega}_{1-})$$
$$\text{Dla ciała 2}: \quad (\mathbf{r}_2 \times -\mathbf{J}) = \mathbf{I}_2(\boldsymbol{\omega}_{2+} - \boldsymbol{\omega}_{2-})$$

Tutaj moment z powodu impulsu oblicza się, przyjmując wektor iloczynu impulsu z odległością od środka ciężkości ciała do punktu zastosowania impulsu. Łącząc wszystkie te równania z równaniem dla e i postępując zgodnie z tą samą procedurą, która jest używana do wyprowadzania liniowej formuły impulsu, otrzymasz formułę dla J, która bierze pod uwagę oba efekty liniowe i kątowe, które możesz następnie wykorzystać aby znaleźć liniowe i kątowe prędkości każdego ciała natychmiast po uderzeniu. Oto wynik:

$$J = -\mathbf{v}_r(e+1)/\{1/m_1 + 1/m_2 + \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{n})/\mathbf{I}_1] \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{n})/\mathbf{I}_2] \times \mathbf{r}_2\}$$

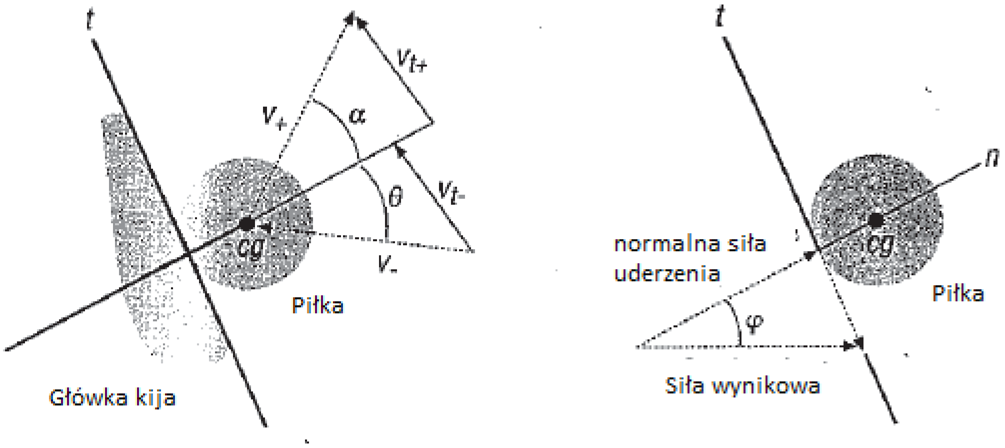
Tutaj v_r jest względną prędkością wzdłuż linii działania w punkcie uderzenie P, a n jest wektorem jednostkowym wzdłuż linii działania w punkcie uderzenia wskazującym z ciała l. Dzięki tej nowej formule J można obliczyć zmianę w liniowych i kątowych prędkościach obiektów uczestniczących w kolizji z wykorzystaniem tych wzorów:

$$\mathbf{v}_{1+} = \mathbf{v}_{1-} + (J\mathbf{n})/m_1$$
$$\mathbf{v}_{2+} = \mathbf{v}_{2-} + (-J\mathbf{n})/m_2$$
$$\boldsymbol{\omega}_{1+} = \boldsymbol{\omega}_{1-} + (\mathbf{r}_1 \times J\mathbf{n})/\mathbf{I}_{cg}$$
$$\boldsymbol{\omega}_{2+} = \boldsymbol{\omega}_{2-} + (\mathbf{r}_2 \times -J\mathbf{n})/\mathbf{I}_{cg}$$

Tarcie

Tarcie działa pomiędzy stykającymi się powierzchniami, aby wytrzymać ruch. Gdy obiekty zderzą się w dowolnym typie kolizji, z wyjątkiem bezpośredniego uderzenia, w tym bardzo krótkim momencie kontaktu będą doświadczać siły tarcia, która działa stycznie do stykających się powierzchni. Ta siła styczna zmieni nie tylko prędkości liniowe obiektów zderzających się w kierunku stycznym, ale także stworzy moment (moment obrotowy) na obiektach, które zmienią swoje kątowe prędkości. Ten styczny impuls w połączeniu z normą! Impuls powoduje powstanie skutecznej linii działania całkowitej niepraktycznej kolizji, która nie jest już prostopadła do powierzchni stykowych. W praktyce bardzo trudno jest policzyć tę siłę tarcia zderzenia, ponieważ tarcie nie musi być stałe, jeżeli zderzenie jest tak duże, że siła tarcia osiąga noc poza maksymalną statyczną siłą tarcia. Dalsze komplikacje z faktu, że przedmioty mają tendencję do deformacji, gdy zderzają się, tworząc dodatkowe źródło oporu. To powiedziawszy, ponieważ siła tarcia jest funkcją norma! siła między stykowymi powierzchniami, wiesz, że stosunek siły normalnej do siły tarcia jest równy współczynnikowi tarcia. Jeśli przyjmiesz, że kolizje są takie, że współczynnik tarcia kinetycznego ma zastosowanie, to stosunek ten jest stały: $\mu = F_f/F_n$

W tym przypadku F_f jest styczną siłą tarcia, a F_n jest normalną siłą uderzenia. Możesz rozszerzyć to, aby powiedzieć, że stosunek styczny impuls do normalnej wartość impulsu jest równa współczynnikowi tarcia. Rozważ zderzenie kija golfowego z piłką golfową zilustrowane na rysunku



Na wykresie prędkości po lewej v_- reprezentuje względną prędkość pomiędzy piłką a główką kija w momencie, w którym nie ma znaczenia, v_+ oznacza prędkość piłki tuż po uderzenie, a v_{t-} i v_{t+} oznaczają styczne składniki prędkości kulki odpowiednio tuż po chwili uderzenia. Gdyby to było zderzenie bez tarcia, v_{t-} i v_{t+} byłyby równe, podobnie jak kąty α i θ Jednak w przypadku tarcia prędkość styczna kuli jest zmniejszona, co powoduje, że i v_{t+} jest mniejsze niż V_{t-1}, co oznacza również, że α będzie mniejsze niż θ. Schemat działania po prawej stronie rysunku ilustruje siły związane z tarciem. Ponieważ stosunek sił siły tarcia do ·normalnej siły zderzenia jest równy współczynnikowi tarcia, możesz opracować równanie dotyczące kąta Φ do współczynnika tarcia:

$$\tan\phi = F_f/F_n = \mu$$

W dodatku do tej siły tarcia zmieniającej liniową prędkość kuli w stycznej kierunek, tzn. zmieni również prędkość kątową piłki. Ponieważ siła tarcia działa na powierzchni piłki w pewnej odległości od jej środka ciężkości, tworzy moment (moment obrotowy) wokół środka ciężkości kuli, który powoduje, że kula się obraca. Jeśli użyjesz podejścia podobnego do przykładu walca walcującego z powrotem , możesz opracować równanie dla nowej prędkości kątowej kulki w kategoriach normalnej siły uderzenia lub impulsu:

$$\sum M_{cg} = F_f\, r = I_{cg}\, d\omega/dt$$
$$\mu F_n r = I_{cg}\, d\omega/dt$$
$$\mu F_n r\, dt = I_{cg}\, d\omega$$
$$\int_{t-}^{t+} F_n\, dt = I_{cg}/(\mu r) \int_{\omega-}^{\omega+} \omega\, dt$$

Zauważ tutaj, że całka po lewej jest normalnym impulsem; a zatem,

$$\text{Impulse} = I_{cg}/(\mu r)(\omega_+ - \omega_-)$$
$$\omega_+ = (\text{Impulse})(\mu r)/I_{cg} + \omega_-$$

Ta relacja wygląda bardzo podobnie do równania impulsu kątowego, które pokazaliśmy wcześniej, i można go użyć do przybliżenia spinów wywołanych tarciem w konkretnych problemach kolizji. Powróć do równania impulsu, J, w poprzedniej sekcji, która zawiera zarówno efekty liniowe, jak i kątowe. Tutaj znowu dla wygody:

$$J = -\mathbf{v}_r(e+1)/[1/m_1 + 1/m_2 + \mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{n})/\mathbf{I}_1 + \mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{n})/\mathbf{I}_2]$$

Ta formuła daje impuls kolizji w normalnym kierunku. Aby zobaczyć, w jaki sposób tarcie pasuje, należy pamiętać, że tarcie działa stycznie na powierzchnie styku, a łączenie siły tarcia z normalną siłą uderzenia daje nową skuteczną linię działania dla kolizji i siła tarcia (i impuls) jest funkcją normalną siłą (impuls) i współczynnik tarcia. Biorąc pod uwagę wszystkie te czynniki, nowe równania do obliczenia: e zmiana prędkości liniowej i kątowej dwóch zderzających się obiektów jest następująca:

$$\mathbf{v}_{1+} = \mathbf{v}_{1-} + [J\mathbf{n} + (\mu J)\mathbf{t}]/m_1$$
$$\mathbf{v}_{2+} = \mathbf{v}_{2-} + [-J\mathbf{n} + (\mu J)\mathbf{t}]/m_2$$
$$\omega_{1+} = \omega_{1-} + \{\mathbf{r}_1 \times [J\mathbf{n} + (\mu J)\mathbf{t}]\}/\mathbf{I}_{cg}$$
$$\omega_{2+} = \omega_{2-} + \{\mathbf{r}_2 \times (-J\mathbf{n} + (\mu J)\mathbf{t}]\}/\mathbf{I}_{cg}$$

W tych równaniach t jest wektorem stycznym, który jest styczny do powierzchni kolizji i pod kątem prostym do wektora normalnego jednostki. Możesz obliczyć wektor styczny, jeśli znasz wektor normalny jednostki i wektor prędkości względnej w tej samej płaszczyźnie, co wektor normalny:

$$\mathbf{t} = (\mathbf{n} \times \mathbf{v}_r) \times \mathbf{n}$$
$$\mathbf{t} = \mathbf{t}/|\mathbf{t}|$$

W przypadku wielu problemów, które napotkasz, możesz być w stanie rozsądnie zaniedbać tarcie w swoich procedurach reagowania na kolizje, ponieważ jego efekt może być niewielki w porównaniu z efektem normalnego impulsu. Jednak w przypadku niektórych problemów, tarcie ma kluczowe znaczenie. Na przykład trajektoria lotu piłki golfowej zależy w dużym stopniu od spinu przekazanego jej w wyniku zderzenia piłki