

VI. Pociski

Ta część jest pierwszą z serii części, które omawiają konkretne zjawiska i systemy w świecie rzeczywistym, takie jak ruchy pocisku i samoloty, z myślą o solidnym zrozumieniu ich prawdziwych zachowań. To zrozumienie pomoże ci dokładnie modelować te lub podobne systemy w twoich grach. Zamiast opierać się na czysto idealizowanych formułach, przedstawię szeroką gamę praktycznych wzorów i danych, z których można korzystać. Wybrałem przykłady w tej i następujących kilku częściach, aby zilustrować wspólne siły i zjawiska, które istnieją w wielu systemach, nie tylko tych, o których będę tutaj dyskutować. Gdy zrozumiesz, co ma się stać z tymi i podobnymi systemami, będziesz w stanie lepiej interpretować wyniki symulacji, aby określić, czy mają one sens, to znaczy, czy są wystarczająco realistyczne. Będziesz również lepiej wykształcony, jakie czynniki są najważniejsze dla danego systemu, dzięki czemu możesz odpowiednio uprościć założenia, aby ułatwić sobie pracę. Zasadniczo, projektując i optymalizując kod, będziesz wiedział, gdzie zostały wycięte elementy bez rezygnacji z realizmu. To staje się przedmiotem strojenia parametrów. W ciągu kilku następujących rozdziałów chcę ci dać wystarczająco dużo zrozumienia pewnych zjawisk fizycznych, które możesz dostroić do swoich modeli dla pożądanego zachowania. Jeśli modelujesz kilka podobnych obiektów w swojej symulacji, ale chcesz, aby każdy zachowywał się nieco inaczej; następnie musisz dostroić siły, które zostaną zastosowane do każdego obiektu, aby osiągnąć zróżnicowane zachowanie. Ponieważ siły rządzą zachowaniem obiektów w twoich symulacjach, skupię się na obliczeniach siły z zamiarem pokazania ci, jak i dlaczego pewne siły są tym, czym są, zamiast po prostu używać wyidealizowanych formuł, które pokazałem ci w części 3. Parametr strojenie nie ogranicza się tylko do strojenia zachowania modelu; to także dotyczy czynienia z numerka! problemy, takie jak stabilność numeryczna w algorytmach integracyjnych.

Poświęciłem cały ten rozdział ruchowi pocisku, ponieważ tak wiele fizycznych problemów, które mogą znaleźć się w twoich grach, należy do tej kategorii. Co więcej, siły rządzące ruchem pocisku wpływają na wiele innych systemów, które nie muszą koniecznie wyświetlać płytek; na przykład siła oporu pociąganego przez pociski jest podobna do tej doświadczanej przez samoloty, samochody lub jakkolwiek inny przedmiot poruszający się przez płyn taki jak powietrze lub woda. Pocisk jest obiektem, który jest wprawiany w ruch przez siłę działającą przez bardzo krótki okres czasu, o którym wiadomo, że z rozdziału 5 nazywany jest również impulsem. Po ustawieniu pocisku w morionie za pomocą początkowego impulsu, podczas fazy wystrzeliwania, projektor wchodzi w fazę ruchu pocisku, w którym nie działa już siła pchająca lub napędowa. Jak już wiesz z przykładów przedstawionych w częściach 2 i 4, istnieją inne siły działające na pociski. (W tej chwili nie mówię o samobieżnych "pociskach", takich jak rakieta, ponieważ dzięki swojej sile napędowej nie robią tego, co ja określiłam jako klasyczne uderzenie pocisku po wyczerpaniu paliwa .) W najprostszym przypadku, zaniebując efekty aerodynamiczne, jedyną siłą działającą na pocisk inny niż początkowa siła impulsywna jest grawitacja. W sytuacjach, w których pocisk znajduje się blisko powierzchni ziemi, problem ogranicza się do stałego problemu z przyspieszaniem. Zakładając, że powierzchnia Ziemi jest płaska, to znaczy, że jej krzywizna jest duża w porównaniu do zasięgu pocisku, poniższe stwierdzenia opisują ruch pocisku:

- Trajektoria jest paraboliczna.
- Maksymalny zasięg dla danej prędkości startowej występuje, gdy kąt startowy wynosi 45° .
- Prędkość przy uderzeniu jest równa prędkości startu, gdy punkt startowy i punkt uderzenia znajdują się na tym samym poziomie.
- Pionowa składowa prędkości wynosi zero na wierzchołku trajektorii.

- Czas wymagany do osiągnięcia wierzchołka jest równy czasowi niezbędnemu do zejścia z wierzchołka do punktu uderzenia, przy założeniu, że punkt startowy i punkt uderzenia znajdują się na tym samym poziomie.

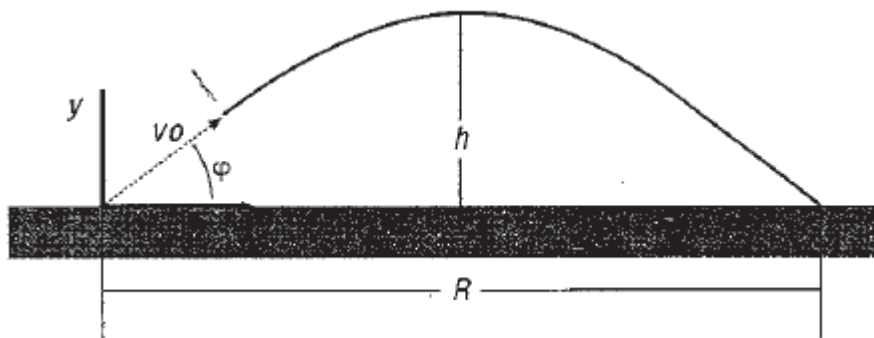
- Czas wymagany do zejścia z wierzchołka do punktu uderzenia jest równy czasowi niezbędnemu do tego, by spadł na taką samą odległość, gdy spadł prosto z wysokości równej wysokości wierzchołka.

Proste trajektorie

Istnieją cztery proste klasy problemów z poruszaniem pocisku, które omówię:

- Gdy cel i punkt uruchamiania znajdują się na tym samym poziomie
- Gdy cel znajduje się na poziomie wyższym niż punkt początkowy
- Gdy cel znajduje się na poziomie niższym niż punkt początkowy
- Gdy pocisk zostanie zrzucony z poruszającego się systemu (np. Samolotu) ponad cel

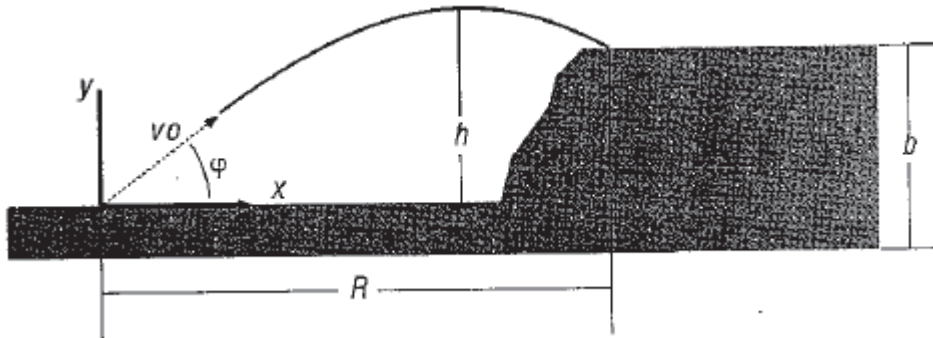
W pierwszym rodzaju problemu punkt startowy i punkt docelowy znajdują się na tej samej płaszczyźnie poziomej. Nawiązując do rysunku, v_0 jest początkową prędkością pocisku w czasie startu, ϕ jest kątem startu, R jest zakresem pocisku, a h jest wysokością wierzchołka trajektorii.



Aby rozwiązać ten problem, użyj wzorów przedstawionych w tabeli. Zwróć uwagę, że w tych wzorach t oznacza dowolną chwilę natychmiast po uruchomieniu, a T oznacza całkowity czas od uruchomienia do uderzenia.

$x(t)$	$(v_0 \cos \phi)t$
$y(t)$	$(v_0 \sin \phi)t - (gt^2)/2$
$v_x(t)$	$v_0 \cos \phi$
$v_y(t)$	$v_0 \sin \phi - gt$
$v(t)$	$\sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \sin \phi + g^2t^2}$
h	$(v_0^2 \sin^2 \phi) / (2g)$
R	$v_0 T \cos \phi$
T	$(2v_0 \sin \phi) / g$

Pamiętaj, aby zachować spójność jednostek podczas stosowania tych formuł. Jeśli pracujesz w systemie angielskim, wszystkie wartości długości i odległości powinny być w stopach (ft), czas powinien być w sekundach, prędkość powinna być w stopach na sekundę (ft / s), a przyspieszenie powinno być w stopy na sekundę do kwadratu (ft/s²). Jeśli używasz systemu SI (metryczny), długość i odległość powinny być w metrach (m), czas powinien być w sekundach (s), prędkość powinna być w metrach na sekundę (m / s), a przyspieszenie powinno być w metrach na sekundę do kwadratu (m / s²). W systemie angielskim g wynosi 32,2 stopy / s²; w układzie SI g wynosi 9,8 m / s². W drugim rodzaju problemu punkt startowy znajduje się na niższej poziomej płaszczyźnie niż cel. Nawiązując do poniższego rysunku, współrzędna y punktu startowego jest większa niż współrzędna y celu.



W przypadku tego typu problemów użyj wzorów przedstawionych w tabeli poniżej. Zauważ, że większość z tych formuł jest taka sama jak te przedstawione w powyższej Tabeli.

$x(t)$	$(v_0 \cos \varphi)t$
$y(t)$	$(v_0 \sin \varphi)t - (gt^2)/2$
$v_x(t)$	$v_0 \cos \varphi$
$v_y(t)$	$v_0 \sin \varphi - gt$
$v(t)$	$\sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \sin \varphi + g^2t^2}$
h	$(v_0^2 \sin^2 \varphi) / (2g)$
R	$v_0 T \cos \varphi$
T	$(v_0 \sin \varphi) / g + \sqrt{[2(h - b)] / g}$

W rzeczywistości jedyną formułą, która się zmieniła, jest zmienna T, która została zmieniona w celu uwzględnienia różnicy w wysokości między celem a punktem początkowym. W trzecim rodzaju problemu cel znajduje się na płaszczyźnie niższej niż punkt startu; współrzędna y celu jest mniejsza niż współrzędna y punktu startowego

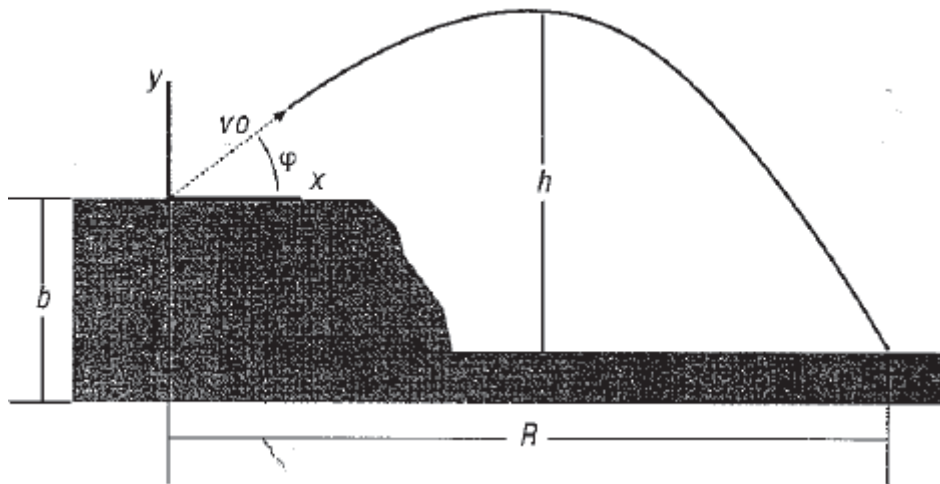


Tabela poniższa pokazuje formuły do użycia w tego typu problemach. Również tutaj prawie wszystkie formuły są takie same, jak te przedstawione w pierwszej tabeli

$x(t)$	$(v_0 \cos \varphi) t$
$y(t)$	$(v_0 \sin \varphi) t - (gt^2)/2$
$v_x(t)$	$v_0 \cos \varphi$
$v_y(t)$	$v_0 \sin \varphi - gt$
$v(t)$	$\sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \sin \varphi + g^2 t^2}$
h	$b + (v_0^2 \sin^2 \varphi) / (2g)$
R	$v_0 T \cos \varphi$
T	$(v_0 \sin \varphi) / g + \sqrt{(2h) / g}$

Podobnie jak w drugim typie problemu, jedyną zmienioną formułą jest wzór dla T , który został zmieniony w celu uwzględnienia różnicy w wysokości między punktem docelowym a punktem początkowym (z wyjątkiem tego, że cel jest niższy niż punkt początkowy). Wreszcie czwarty rodzaj problemu polega na upuszczeniu pocisku z poruszającego się systemu, takiego jak samolot. W tym przypadku początkowa prędkość pocisku jest pozioma i równa prędkości pojazdu, który go upuszcza. Rysunek ilustruje ten typ problemu.

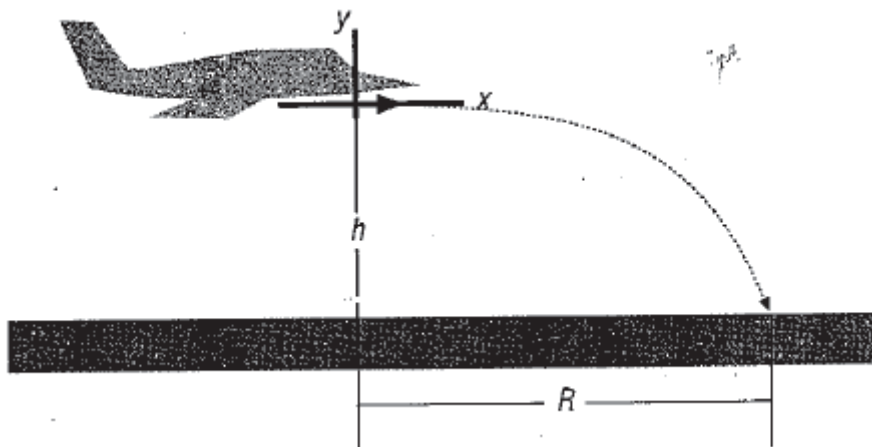


Tabela przedstawia formuły używane do rozwiązania tego typu problemu. Zauważ tutaj, że gdy v_0 jest równe zero, problem ogranicza się do prostego problemu swobodnego upadku, w którym pocisk po prostu spada prosto w dół.

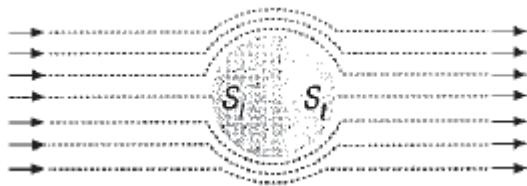
$x(t)$	$v_0 t$
$y(t)$	$h - (gt^2)/2$
$v_x(t)$	v_0
$v_y(t)$	$-gt$
$v(t)$	$\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$
h	$(gt^2)/2$
R	$v_0 T$
T	$\sqrt{(2h)/g}$

Te formuły są przydatne, jeśli piszesz grę, która nie wymaga dokładniejszego traktowania ruchu pocisku, to znaczy, jeśli nie potrzebujesz lub nie chcesz brać pod uwagę innych sił, które mogą działać na ruch w ruchu. Jeśli idą na większą dokładność, wtedy będziesz musiał rozważyć te inne siły i potraktować problem, tak jak to zrobiliśmy w przykładzie z części 4.

Opór

W części 3 i 4 pokazałem wam wyidealizowaną formułę dla lepkiego oporu dynamicznego cieczy oraz sposób implementacji oporu w równaniach ruchu dla pocisku. Zostało to zilustrowane w przykładowym programie omówionym w części 4. Ponownie stwierdzić, że siła oporu jest wektorem, podobnie jak każda inna siła, i że działa na linii działania wektora prędkości, ale w kierunku przeciwnym do prędkości. Podczas gdy te formuły działają w symulacji gry, jak już powiedziałem, nie opowiadają całej historii. Chociaż nie możemy w całości traktować przedmiotu dynamiki płynów, chcę dać wam lepsze zrozumienie oporu niż proste równanie wyidealizowane przedstawione wcześniej. Można to wykazać metodami analitycznymi, że opór obiektu przemieszczającego się przez płyn jest proporcjonalny do jego prędkości, rozmiaru i kształtu oraz gęstości i lepkości płynu, przez który się porusza. Możesz także dojść do tych wniosków, korzystając z własnego doświadczenia w życiu. Na

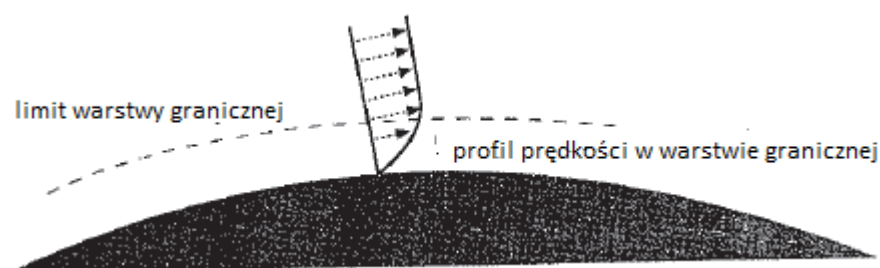
przykład, gdy machasz ręką w powietrzu, czujesz bardzo mały opór; Jeśli jednak wyciągniesz rękę z okna samochodu poruszającego się z prędkością 60 mil na godzinę, poczujesz znacznie większy opór (siłę oporu) na dłoni. Dzieje się tak dlatego, że przeciąganie zależy od prędkości. Kiedy machasz ręką pod wodą, powiedzmy, w basenie, poczujesz większą siłę oporu na dłoni niż podczas machania nią w powietrzu. Dzieje się tak, ponieważ woda jest bardziej gęsta i lepka niż powietrze. Gdy machasz ręką pod wodą, zauważysz znaczną różnicę w oporze w zależności od orientacji ręki. Jeśli twoja ręka jest taka, że twoja dłoń jest zgodna z kierunkiem ruchu, to znaczy, że prowadzisz dłonią, wtedy poczujesz większą siłę oporu niż wtedy, gdyby twoja ręka była obrócona o 90 stopni, jak gdybyś wykonywali przez wodę nóż karate z nożem. Mówi ci to, że przeciągnięcie jest funkcją kształtu obiektu. Masz świetny pomysł. Aby ułatwić dyskusję na temat dynamiki płynów, popatrzmy na przepływ wokół kuli poruszającej się w cieczy, takiej jak powietrze lub woda. Jeśli kula porusza się powoli w płynie, wzór przepływu w sferze będzie wyglądał jak na rysunku



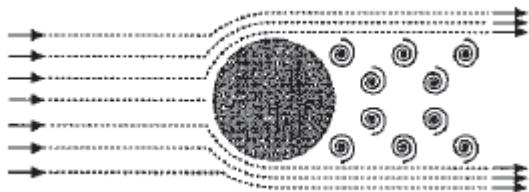
Równanie Bernoulliego, które wiąże ciśnienie z prędkością w przepływie płynu, mówi, że gdy płyn krąży wokół kuli i przyspiesza, ciśnienie w płynie (lokalnie) spadnie. Równanie, przedstawione przez Daniela Bernoulliego w 1738 roku, odnosi się do bezpostaciowego nieściśliwego przepływu cieczy i wygląda tak:

$$P/\gamma + z + V^2/(2g) = \text{constant}$$

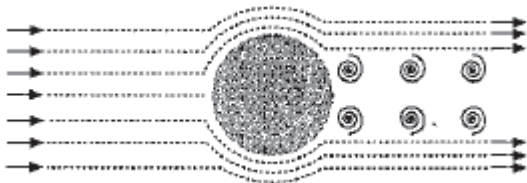
gdzie P jest ciśnieniem w punkcie w rozważanej objętości płynu, γ jest ciężarem właściwym płynu, z jest rzędną rozpatrywanego punktu, V jest prędkością płynu w tym punkcie, a g jest przyspieszeniem wynikającym z powaga. Jak widać, jeśli wyrażenie po lewej ma pozostać stałe i przyjmując, że z jest stałe, a następnie, jeśli prędkość wzrasta, ciśnienie musi spadać. Podobnie, jeśli wzrasta ciśnienie, prędkość musi spadać. Odnosząc się do rysunku powyższego, ciśnienie będzie największe w punkcie stagnacji, S_1 , i zmniejszy się wokół czołowej strony kuli, a następnie zacznie ponownie zwiększać się dookoła tyłu kuli. W idealnym płynie bez tarcia, ciśnienie jest w pełni odzyskiwane za kulą i istnieje ciągły punkt stagnacji, S_2 , którego ciśnienie jest równe ciśnieniu w czołowym punkcie stagnacji. Ponieważ ciśnienie i koniec sfery są równe i przeciwne, nie występuje siła oporu netto działająca na kulę. Ciśnienie na górnej i dolnej części kuli będzie niższe niż w punktach stagnacji, ponieważ prędkość płynu jest większa na górze i na dole. Ponieważ jest to przypadek symetrycznego przepływu wokół kuli, nie będzie różnicy ciśnień netto między górną i dolną częścią kuli. W prawdziwym płynie występuje tarcie, które wpływa na przepływ wokół kuli, tak że ciśnienie nigdy nie jest w pełni odzyskiwane po stronie rufy kuli. Gdy płyn przepływa wokół kuli, cienka warstwa przywiera do powierzchni kuli z powodu tarcia. W tej warstwie granicznej prędkość płynu zmienia się od zera na powierzchni kuli do idealnej prędkości swobodnego przepływu, jak pokazano na rysunku



Ten gradient prędkości przedstawia przeniesienie pędu z kuli do płynu i powoduje powstanie frakcyjnej składowej oporu. Ponieważ pewna ilość płynu przykleja się do kuli, możesz myśleć o niej jako o energii potrzebnej do przyspieszenia płynu i poruszania nim wraz z kulą. (Jeśli przepływ w warstwie granicznej rdzenia jest laminarny, wówczas lepkie naprężenie ścinające między "warstwami" cieczy powoduje opór tarcia, a gdy przepływ jest turbulentny, gradient prędkości, a tym samym przenoszenie pędu, powoduje opór tarcia.) Przesuwając się dalej wzdłuż obszaru, warstwa graniczna powiększa się i nie będzie w stanie utrzymać swojej powierzchni wspólnej, i rozdzieli punkt kulminacyjny. Poza tym punktem oddzielenia przepływ będzie burzliwy, a to się nazywa burzliwym budzeniem. W tym regionie ciśnienie płynu jest niższe niż na czole sfery. Ta różnica ciśnień powoduje wzrost ciśnienia w oporze. Poniższy rysunek pokazuje, jak może wyglądać przepływ



W przypadku wolno poruszającej się kuli punkt oddzielenia będzie około 80° od krawędzi natarcia. Teraz, jeśli zszorstkujesz powierzchnię kuli, wpłyniesz na jej przepływ. Jak można się spodziewać, ta szorstka kula będzie miała większy składnik oporu tarcia. Jednak, co ważniejsze, przepływ będzie dłużej przylegał do kuli, a punkt separacji zostanie przesunięty dalej z powrotem do około 115° , jak pokazano na rysunku

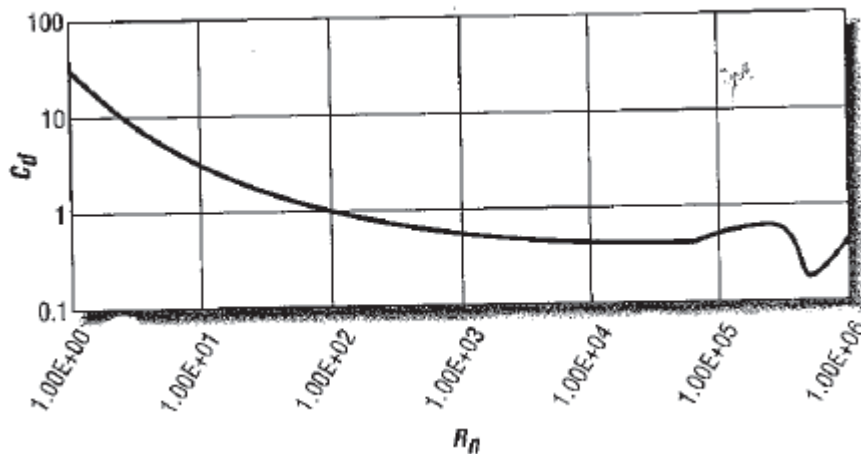


To. zmniejszy rozmiar burzliwego wybudzenia i różnicę ciśnień, zmniejszając w ten sposób opór ciśnieniowy. To paradoksalne, ale prawdą jest, że wszystkie inne rzeczy są równe, a lekko szorstka kula będzie miała mniejszy opór całkowity niż płynny. Czy zastanawiałeś się kiedyś, dlaczego piłki golfowe mają dołeczki? Jeśli tak, to jest twoja odpowiedź. Całkowity opór na kuli zależy w dużej mierze od charakteru przepływu wokół kuli, to znaczy od tego, czy przepływ jest laminarny, czy turbulentny. Najlepiej ilustruje to niektóre dane eksperymentalne. Poniższy rysunek przedstawia typową krzywą całkowitego współczynnika oporu dla sfery wykreślonej jako funkcja liczby Reynoldsa. Liczba Reynoldsa (powszechnie oznaczana jako Re lub Rn) jest liczbą bezwymiarową, która reprezentuje prędkość przepływu płynu wokół obiektu. To trochę więcej niż miara prędkości, ponieważ liczba Reynoldsa zawiera charakterystyczną długość obiektu oraz lepkość i gęstość płynu. Wzór na numer Reynoldsa to

$$R_n = (vL)/\nu$$

lub

$$R_n = (vL\rho)/\mu$$



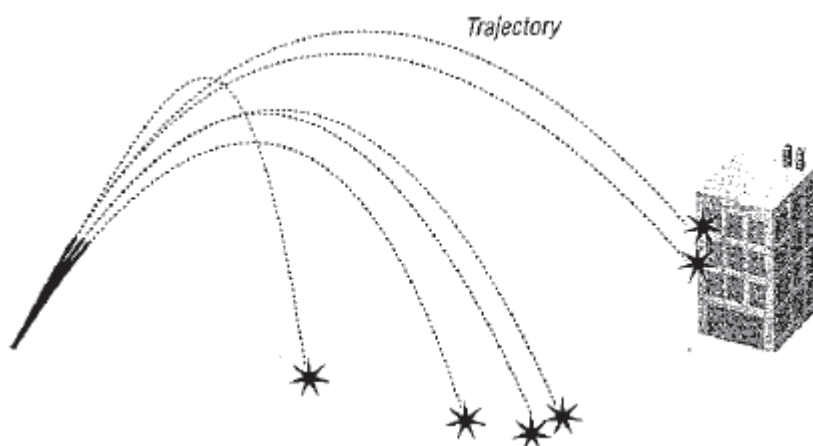
gdzie v jest prędkością, L jest charakterystyczną długością obiektu (średnica kuli), μ jest lepkością kinematyczną płynu, ρ jest masową gęstością płynu, a μ , jest bezwzględną lepkością płynu. Aby liczba Reynolda mogła się sprawdzić jako liczba bezwymiarowa, prędkość, długość i lepkość kinematyczna muszą mieć odpowiednio jednostki ft / s , ft i ft^2 / s , gdy pracują w systemie angielskim. W systemie SI ich jednostki muszą mieć odpowiednio m / s , m i m^2 / s . Liczba ta jest przydatna w przypadku nadmiarowych danych mierzonych od testów na obiekcie o danym rozmiarze (takim jak model), takich chatach dane mogą być skalowane w celu oszacowania danych dla podobnych obiektów o rozmiarze różnicy. Tutaj "podobny" oznacza, że obiekty są geometrycznie podobne, tylko różne skale, i że wzór przepływu wokół obiektów jest podobny. W przypadku kuli charakterystyczna długość to średnica, więc można użyć danych przeciągania, które zostały skreślone z małej kuli modelu o danej średnicy, aby oszacować opór dla większej kuli o średnicy różnicowej. Bardziej użytecznym zastosowaniem tej techniki skalowania jest oszacowanie oporu lepkości na przyłbicach statku lub samolotu na podstawie danych testowych modelu skreślonych z eksperymentów z użyciem kanału wiatrowego lub zbiornika holowniczego. Liczba Reynolda jest używana jako wskaźnik rodzaju przepływu płynu. Niska liczba Reynolda generalnie wskazuje na przepływ laminarny, podczas gdy wysoka liczba Reynolda generalnie dotyczy turbulentnego przepływu. Gdzieś pomiędzy znajduje się zakres przeszukiwania, w którym przepływ powoduje przemieszczenie od przepływu laminarnego do turbulentnego. W starannie kontrolowanych eksperymentach ta liczba (krytyczna) Reynolda może być konsekwentnie określana. Jednakże, ogólnie, pole przepływu otoczenia wokół obiektu, to znaczy, gdy ma niską lub wysoką turbulencję, będzie miało wpływ, gdy nastąpi to przemieszczenie. Co więcej, numer przejścia Reynolda jest specyficzny dla rodzaju problemu, który jest badany, na przykład, czy patrzysz na przepływ w rurach, przepływ wokół statku lub przepływ wokół samolotu i tak dalej. Współczynnik oporu całkowitego, C_d , oblicza się, mierząc całkowitą rezystancję, R , z testów i stosując następujący wzór:

$$C_d = R_t / (0.5 \rho v^2 A)$$

gdzie A jest charakterystycznym obszarem, który zależy od badanego obiektu. Dla sfery A jest zwykle rzutowanym czołowym obszarem kuli, który jest równy polu koła o średnicy równej powierzchni kuli. Dla porównania, dla kadłubów statków, A jest zwykle brane jako powierzchnia podwodna kadłuba. Jeśli rozwiążesz jednostki po prawej stronie tego równania, zobaczysz, że współczynnik oporu jest nieproporcjonalny, to znaczy, że nie ma jednostek. Biorąc pod uwagę całkowity współczynnik oporu, można oszacować całkowity opór (opór) za pomocą następującej formuły:

$$R_t = (0.5 \rho v^2 A) C_d$$

Jest to lepsze równanie niż te podane w części 3, przy założeniu, że dostępne są wystarczające informacje, a mianowicie; całkowity współczynnik oporu, gęstość; prędkość; i obszar. Zwróć uwagę na zależność całkowitego oporu od prędkości podniesionej do kwadratu. Aby uzyskać R_t w jednostkach funtów (lb), musisz mieć prędkość w ft / s, obszar w ft² i gęstość w slug / ft³ (pamiętaj, że Cd jest bezwymiarowy). W systemie SI otrzymasz R_t w newtonach (N), jeśli masz prędkość w m / s, obszar w m², a gęstość w kg / m³. Powracając teraz do ostatniej ryciny, możesz wykonać kilka obserwacji. Najpierw widać, że całkowity współczynnik oporu maleje wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa. Jest to spowodowane tworzeniem punktu oddzielenia i jego dalszym ruchem w kierunku kuli w miarę wzrostu liczby Reynoldsa i względnego zmniejszenia oporu ciśnienia, jak to omówiono poprzednio. Przy liczbie Reynoldsa wynoszącej około 250 000 następuje radykalna redukcja oporu. Jest to wynikiem tego, że przepływ staje się w pełni turbulentny z odpowiednią redukcją oporów ciśnienia. W przykładzie Cannon2 w części 4 zaimplementowałem pomysł formuła oporu powietrza na pocisku. W tym przypadku użyłem stałej wartości współczynnika oporu, który został arbitralnie zdefiniowany. Jak już wspominałem wcześniej, lepiej byłoby zastosować formułę przedstawioną w tym rozdziale dla całkowitego przeciągnięcia wraz z danymi współczynników oporu całkowitego pokazanymi na rysunku po, aby oszacować opór pocisku. Chociaż jest to bardziej "dokładne", to komplikuje sprawę. Konkretnie; Współczynnik oporu jest teraz funkcją liczby Reynoldsa, która jest funkcją prędkości. Będziesz musiał ustawić tabelę współczynników oporu względem liczby Reynoldsa i interpolować tę tabelę, biorąc pod uwagę liczbę Reynoldsa obliczoną dla każdego kroku czasowego. Alternatywnie można dopasować dane współczynnika oporu do krzywej, aby wyprowadzić formułę, której można użyć zamiast niej; jednak dane współczynnika oporu mogą być takie, że będziesz musiał użyć częściowego podejścia i wyprowadzić dopasowanie krzywej dla każdego segmentu krzywej współczynnika oporu. Przedstawione tu dane sferyczne są jednym z takich przypadków. Dane nie nadają się dobrze do dopasowania pojedynczej krzywej wielomianowej do pełnego zakresu numerów Reynoldsa. W takich przypadkach otrzymasz garść formuł współczynnika oporu z każdą formułą obowiązującą w ograniczonym zakresie liczby Reynoldsa. Podczas gdy przykład Cannon2 ma swoje ograniczenia, przydatne jest zobaczenie efektów przeciągania na trajektorii pocisku. Oczywistym efektem jest to, że trajektoria nie jest już paraboliczna. Widać, że trajektoria wydaje się rzucać dużo kłacz ostro, gdy pochylnia robi zejście po osiągnięciu swojej wysokości wierzchołka.

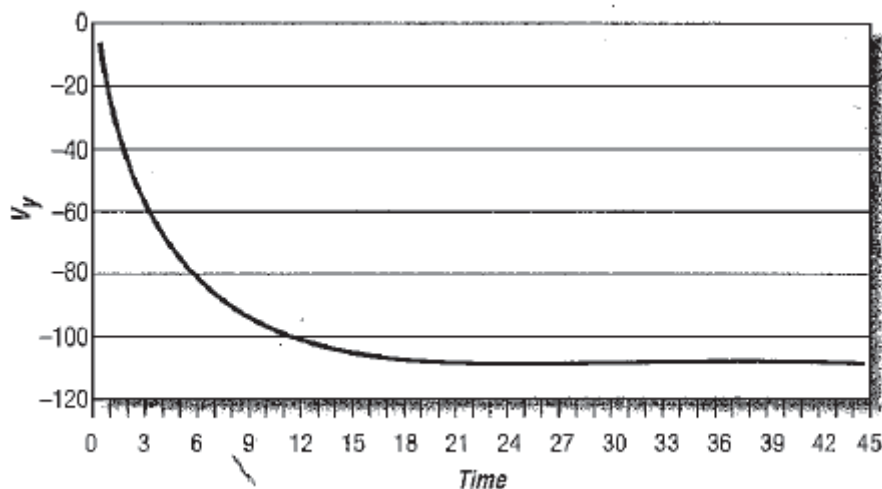


Innym ważnym efektem oporu na trajektorii (dotyczy to również obiektów w czasie swobodnego spadania) jest fakt, że opór ogranicza maksymalną możliwą prędkość pionową. Ta granica jest tak zwaną prędkością końcową. Weź obiekt przez chwilę w swobodnym spadku. Gdy obiekt przyspiesza w kierunku ziemi przy przyspieszaniu grawitacyjnym, jego prędkość wzrasta. Wraz ze wzrostem prędkości wzrasta również przeciągnięcie, ponieważ opór jest funkcją prędkości. Przy tej samej prędkości siła

oporu opóźniająca ruch obiektu wzrośnie do punktu, w którym tj. Jest równa sile grawitacji, która ciągnie obiekt w kierunku ziemi. W przypadku braku jakichkolwiek innych sił, które mogą wpływać na ruch, przyspieszenie netto na obiekcie wynosi zero i kontynuuje jego opadanie ze stałą prędkością końcową. Pozwól mi to zilustrować dalej. Wróc do formuły I wyprowadzonej dla składowej y (składowej pionowej) prędkości dla pocisku modelowanego w przykładzie Cannon2. Tutaj znowu jest tak, że nie musisz wracać do części 4:

$$v_{y2} = (1/C_d)e^{(-C_d/m)t}(C_d v_{y1} + mg) - (mg)/C_d$$

Nie jest oczywiste, patrząc na to równanie, ale składnik prędkości, asymptoty v_{y2} do pewnej stałej wartości w miarę upływu czasu. Aby pomóc sobie w wizualizacji, wyrysowałem to równanie, jak pokazano na rysunku poniżej



Jak widać, z czasem prędkość osiąga maksymalną wartość bezwzględną około -107,25 jednostek prędkości. Prędkości ujemne wskazują, że prędkość jest ujemna w kierunku y, to znaczy obiekt spada w kierunku ziemi w tym przypadku. (Dla tych obliczeń arbitralnie założyłem masę 100, współczynnik oporu 30 i prędkość początkową równą zero.) Zakładając początkową prędkość równą zero i przyrównując formułę całkowitego oporu pokazaną wcześniej do ciężaru obiektu, można wyprowadzić następujący wzór dla prędkości końcowej dla obiektu w swobodnym spadku:

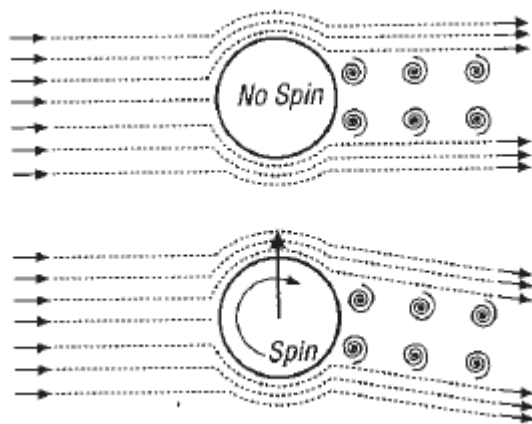
$$v_t = \sqrt{(2mg)/(C_d \rho A)}$$

Sztuczka w stosowaniu tej formuły polega na określeniu prawidłowej wartości współczynnika oporu Dla zabawy, przyjmijmy współczynnik oporu równy 0,5 i oblicz prędkość końcową dla kilku różnych obiektów. To ćwiczenie pozwoli ci zobaczyć wpływ wielkości obiektu na prędkość końcową. Chociaż mówiłem głównie o sferach w tej sekcji, dyskusje na temat przepływu płynu ogólnie odnoszą się do dowolnego obiektu poruszającego się płynem. Oczywiście, im bardziej złożona jest geometria obiektu, tym trudniej jest analizować siły oporu na nim. Inne czynniki, takie jak stan powierzchni i czy obiekt znajduje się na granicy między dwoma płynami (np. statek na oceanie)) dodatkowo komplikują analizę. W praktyce szczególnie przydatne są testy modelowe.

Efekt Magnusa

Efekt Magnusa (znany również jako efekt Robbinsa) jest dość interesującym zjawiskiem. Wiesz z poprzedniej sekcji, że obiekt poruszający się przez płyn napotyka na przeciąganie. Co by się stało, gdyby

ten obiekt kręcił się, gdy poruszał się przez płyn. Rozważmy na przykład sferę, o której wcześniej wspominałem, i zakładam, że poruszając się płynem, takim jak powietrze lub woda, tj. Wiruje wokół osi przechodzącej przez jej środek masy. To, co dzieje się, gdy kula się kręci, jest interesującą częścią: faktycznie generuje siłę nośną! To jest prawy podnośnik. Z codziennego doświadczenia większość ludzi kojarzy windę z kształtem skrzydła, takim jak skrzydło samolotu lub wodolot. O wiele mniej wiadomo, że cylindry i kule mogą również wytwarzać podnośnik - tak długo, jak się kręcą. Użyję poruszającej się kuli, żeby wyjaśnić, co się tutaj dzieje. Z poprzedniej sekcji dotyczącej przeciągania wiesz, że dla szybko poruszającej się kuli będzie ten sam punkt na kuli, gdzie przepływ oddziela się, tworząc burzliwy ślad za kulą. Przypomnij sobie, że ciśnienie działające na kulę w tym burzliwym buszu jest silniejsze niż ciśnienie działające na wiodącą powierzchnię kuli i to zróżnicowanie ciśnienia! powoduje powstanie komponentu ucisku ciśnienia. Kiedy kulka wiruje, powiedz; zgodnie z ruchem wskazówek zegara wokół osi poziomej przechodzącej przez jej środek, jak pokazano na rysunku, płyn przechodzący ponad szczytem kuli zostanie przyspieszony, podczas gdy płyn przechodzący pod kulą będzie opóźniony.



Pamiętaj, że z powodu tarcia istnieje cienka warstwa graniczna płynu, która przyczepia się do powierzchni kuli. Na powierzchni kuli prędkość płynu w warstwie granicznej jest zerowa względem kuli. Prędkość wzrasta w warstwie granicznej, gdy oddalasz się od powierzchni kuli. W przypadku sfery wirującej "występuje teraz różnica ciśnienia płynu nad i pod kulą, ze względu na wzrost prędkości powyżej kuli i spadek prędkości poniżej kuli. Ponadto punkt separacji na górnej stronie kuli zostanie przesunięty dalej z powrotem wzdłuż kuli. Rezultatem jest asymetryczny układ przepływu wokół kuli z siłą nośną netto (z powodu różnicy ciśnień) prostopadłą do kierunku przepływu. Jeśli powierzchnia sfery jest trochę szorstka, nie zwiększy się tylko tarcie fricjonal, ale ten wzrost efektu również wzrośnie. Nie pozwól, by termin "podnośnik" wpasował cię w myśl, że ta siła zawsze działa w celu podniesienia lub podniesienia kuli. Wpływ tej siły nośnej na trajektorię kuli jest bardzo mocno związany z osią obrotu, wokół której kula się obraca, w odniesieniu do kierunku, w którym przemieszcza się sfera, czyli jego prędkości kątowej. Wielkość siły Magnusa jest proporcjonalna do prędkości ruchu, szybkości wirowania, gęstości płynu, wielkości obiektu i natury przepływu płynu. Siła ta nie jest łatwa do obliczenia analitycznie, i tak jak w przypadku wielu problemów z dynamiką płynów, musisz polegać na danych eksperymentalnych, aby dokładnie oszacować siłę dla określonego obiektu w określonych warunkach. Istnieją jednak pewne techniki analityczne, które pozwolą ci zbliżyć się do Magnusa. Bez wchodzenia w szczegóły teoretyczne można zastosować twierdzenie Kutta-Joukowski do oszacowania siły nośnej na wirujących obiektach, takich jak cylindry i kulki. Twierdzenie Kutta-Joukowski opiera się na bezstratnej idealizacji przepływu płynu, w której występuje pojęcie kolisty wokół obiektu (np. Wir wokół obiektu). Szczegóły tej teorii można znaleźć w dowolnym tekście dynamiki płynów, więc nie będę tutaj wchodził w szczegóły. Jednakże dam ci trochę wyników. Dla

obracaącego się okrągłego cylindra przechodzącego przez płyn możesz użyć tej formuły do oszacowania siły podnoszenia Magnusa:

$$F_L = 2\pi\rho Lvr^2\omega$$

gdzie v jest prędkością ruchu, L jest długością cylindra, r jest jego promieniem, a ω jest prędkością kątową w radianach na sekundę (rad / s). Jeśli masz spin, n , w obrotach na sekundę (rps), to $\omega = 2\pi n$. Jeśli masz spin, n , w obrotach na minutę (rpm), to $\omega = (2\pi n) / 60$.

W przypadku obracającej się sfery poruszającej się w cieczy można użyć następującej formuły:

$$F_L = (2\pi^2\rho vr^4\omega)/(2r)$$

gdzie r jest promieniem kuli. Stałe jednostki dla tych równań przyniosłyby siłę nośną w funtach w systemie angielskim lub newtonach w systemie SI. W angielskim zagęszczeniu systemu prędkość, długość i promień mają odpowiednio jednostki slugs/ft³, ft / s i ft. W systemie SI odpowiednie jednostki są dla tych ilości odpowiednio: kg / m³, m / s i m. Pamiętaj, że te formuły tylko przybliżają siłę Magnusa; dostaną cię do klubu, ale nie są dokładne i mogą zostać wyłączone nawet o 50% w zależności od sytuacji. Te formuły zakładają, że nie ma poślizgu między płyn i wirująca powierzchnia obiektu, nie ma tarcia, chropowatość powierzchni nie jest brana pod uwagę, i nie ma warstwy granicznej. W każdym razie, te równania pozwolą ci zbliżyć efekt Magnusa do obiektów latających w twoich grach, gdzie będziesz mógł modelować względne różnice pomiędzy obiektami o różnej wielkości, które mogą podróżować z różnymi prędkościami z różnymi prędkościami wirowania. Poprawisz wygląd. Jeśli dokładność liczbowa jest tym, czego szukasz, musisz przetestować dane eksperymentalne dla konkretnego problemu. Podobnie jak w przypadku danych dotyczących przeciągania pokazanych w poprzedniej sekcji, eksperymentalne dane dotyczące windy są generalnie przygotowywane pod względem współczynnika podnoszenia. Używając równania podobnego do równania oporu, możesz obliczyć siłę nośną za pomocą następującego równania:

$$F_L = (0.5\rho v^2 A)C_L$$

Jak zwykle nie jest to tak proste, jak to równanie sprawia, że się pojawia. Sztuczka polega na określeniu współczynnika wzrostu C_L , który jest funkcją warunków powierzchni, liczby Reynoldsa, prędkości; i szybkość wirowania. Co więcej, eksperymenty pokazują, że na współczynnik oporu wpływa również spin. Rozważmy na przykład uderzenie piłki golfowej w taki sposób, aby piłka kręciła się wokół osi poziomej prostopadłej do kierunku lotu podczas lotu. W takim przypadku siła Magnusa będzie miała tendencję do podnoszenia piłki wyżej w powietrzu, zwiększając jej czas lotu i zasięg. Dla uderzenia piłeczki golfowej tak, że prędkość początkowa wynosi 190 stóp / s przy kącie startu 10 stopni, wzrost zasięgu z powodu podniesienia Magnusa jest rzędu 65 jardów; tak więc jasne jest, że ten efekt jest znaczący. W rzeczywistości w ciągu długiej historii gry w golfa podjęto próbę zmaksymalizowania tego efektu. Pod koniec XIX wieku, kiedy piłki golfowe nadal były wykonane z gładkich powierzchni, ludzie zauważyli, że używane piłki o chropowatych powierzchniach leciały jeszcze lepiej niż gładkie piłki. Ta obserwacja skłoniła ludzi do tworzenia kulek o chropowatych powierzchniach, aby zmaksymalizować efekt liftingu Magnusa. Wgłębienia widoczne na nowoczesnych piłkach golfowych to wynik wielu dziesięcioleci doświadczeń i badań, które uważane są za optymalne. · Zwykle piłeczka golfowa startuje z kija z prędkością początkową rzędu 250 stóp / s, z backspinem rzędu 60 obrotów na sekundę (rps). Dla tych warunków początkowych odpowiedni współczynnik podniesienia Magnusa mieści się w zakresie od 0,1 do 0,35. W zależności od prędkości wirowania, współczynnik ten może wynosić nawet

0,45, a siła nośna działająca na kulę może wynosić nawet 50% waga piłki. Jeśli uderzenie piłką golfową zostanie uderzone mniej niż perfekcyjnie, siła podnoszenia Magnusa może działać przeciwko tobie. Na przykład, jeśli twój swing jest taki, że piłka opuszcza główkę kija obracającą się wokół osi, która nie jest pozioma, wówczas trajektoria piłki będzie się kręciła, co spowoduje plasterek lub remis. Jeśli uderzysz piłką w taki sposób, że górna powierzchnia piłki odejdzie od ciebie, wtedy kula będzie się kręciła w dół znacznie szybciej, znacznie zmniejszając zasięg strzału.

Jako inny przykład rozważ piłkę baseballową która jest tak pochylona, że obraca się z górnym wirowaniem wokół osi poziomej prostopadłej do kierunku ruchu. Tutaj siła Magnusa będzie powodowała, że kula będzie się zakrzywiać w kierunku do dołu, co spowoduje, że opada ona szybciej niż bez wirowania. Jeśli miotacz obraca piłkę tak, że oś obrotu nie jest pozioma, wtedy kula wygnie się z płaszczyzny pionowej. Kolejną sztuczką, którą posługują się dzbany, jest nadanie kuli backspin, dzięki czemu wydaje się (pałkarzowi), że rzeczywiście powstaje. Ta rosnąca szybka piłka nie rośnie, ale z powodu siły podnoszenia Magnusa, spada ona znacznie wolniej niż bez wirowania. Dla typowej prędkości i szybkości wirowania odpowiednio 148 stóp (s i 30 punktów na sekundę) siła nośna może wynosić do 33% masy kuli, dla typowej piłki krzywej współczynnik wzrostu mieści się w zakresie od 0,1 do 0,2, a dla kulek muchowych może wynosić nawet 0,4, ale są to tylko dwa przykłady: nie musisz szukać daleko, aby znaleźć inne przykłady siły Magnusa w akcji. Pomyśl o zachowaniu się piłek do krykieta, piłki nożnej, piłek tenisowych lub Piłki pingpongowe, gdy wirują w locie Kule wystrzeliwane z pistoletu z lufą riflingu również obracają się i są dotknięte tą siłą Magnusa, a nawet żagłówki zbudowane z wysokich pionowo obracających się cylindrycznych "żagli", które używają siły Magnusa do napędu Widziałem również artykuły techniczne opisujące śmigło z obracającymi się ostrzami cylindrycznymi zamiast ostrzy płata lotniczego Aby dalej zilustrować efekt Magnusa, przygotowano prosty program, który symuluje rzucanie piłki o różnym poziomie backspin (lub topspin) Ten przykład jest oparty na przykładzie armat, więc tutaj znowu kod powinien wyglądać znajomo. W tym przykładzie zaniedbano opór, więc jedynymi siłami, które zobaczy kulka, są grawitacja i efekt Magnusa. Zrobiłem to, aby wyizolować efekt generujący podniesienie spinu i zachować jaśniejsze równania ruchu. Ponieważ większość kodu dla tego przykładu jest identyczna lub bardzo podobna do tej w poprzednich przykładach armat, nie będę tego tutaj powtarzać. Będę jednak pokazywał zmienne globalne używane w tej symulacji wraz ze zmienioną funkcją DoSimulation, która zajmuje się równaniami ruchu:

```

//-----//
// Global variables required for this simulation
//-----//
TVector      V1;    // Initial Velocity (given), m/s
TVector      V2;    // Velocity vector at time t, m/s
double       m;     // Projectile mass (given), kg
TVector      s1;    // Initial position (given), m
TVector      s2;    // The projectile's position (displacement) vector, m
double       time;  // The time from the instant the projectile
                  // is launched, s

double       tInc;  // The time increment to use when stepping
                  // through the simulation, s

double       g;     // acceleration due to gravity (given), m/s^2
double       spin;  // spin in rpm (given)
double       omega; // spin in radians per second
double       radius; // radius of projectile (given), m

#define      PI      3.14159f
#define      RHO     1.225f      // kg/m^3

//-----//
int          DoSimulation(void)
//-----//
{
    double    C = PI * RHO * RHO * radius * radius * radius * omega;
    double    t;

    // step to the next time in the simulation
    time+=tInc;
    t = time;

    // Calc. V2:
    V2.i = 1.0f/(1.0f-(t/m)*(t/m)*C*C) * (V1.i + C * V1.j * (t/m) -
        C * g * (t*t)/m);
    V2.j = V1.j + (t/m)*C*V2.i - g*t;

    // Calc. S2:
    s2.i = s1.i + V1.i * t + (1.0f/2.0f) * (C/m * V2.j) * (t*t);
    s2.j = s1.j + V1.j * t + (1.0f/2.0f) * ( ((C*V2.i) - m*g)/m ) * (t*t);

    // Check for collision with ground (xz-plane)
    if(s2.j <= 0)
        return 2;

    // Cut off the simulation if it's taking too long
    // This is so the program does not get stuck in the while loop
    if(time>60)
        return 3;

    return 0;
}

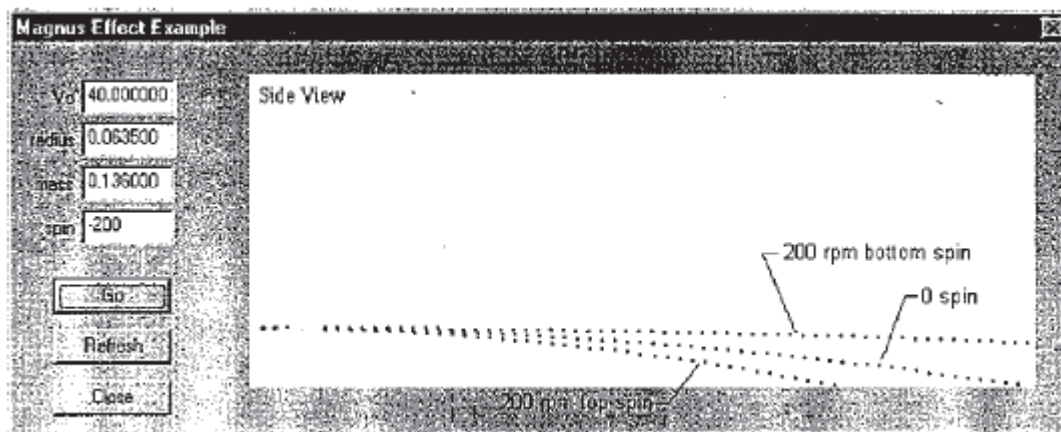
```

Sercem tej symulacji są linie, które odpowiednio obliczyć v_2 i s_2 , chwilową prędkość i położenie pocisku. Równania ruchu pochodzą tutaj z równań ruchu kinetycznego 2D, w tym grawitacji, w połączeniu z poniższą formułą (pokazaną wcześniej) dla oszacowania podniesienia Magnusa na wirującej kuli:

$$F_L = (2\pi^2 \rho v r^4 \omega) / (2r)$$

Możesz zobaczyć efekt obrotu na trajektorii pocisku, dostarczając przykładowy program z różnymi wartościami dla obrotów w obrotach na minutę. Program konwertuje to do radianów na sekundę i

przechowuje tę wartość w zmiennej ω . Wartość dodatnia spinu wskazuje dolne wirowanie tak, że bortom sfery wiruje od Ciebie; ujemny spin oznacza topspin, w którym wierzchołek piłki obraca się od Ciebie. Dolny spin generuje dodatnią siłę nośną, która ma tendencję do rozszerzania zasięgu pocisku; topspin generuje ujemny wzrost, który zmusi pocisk w kierunku ziemi, zmniejszając jego zasięg. (Zauważ, że w tym przykładzie założono, że oś obrotu jest pozioma i prostopadła do osi ekranu). Rysunek przedstawia to zachowanie.



Zmienna masa

Wcześniej wspominaliśmy, że niektóre problemy z dynamiką wiążą się ze zmienną masą. Będziemy tu patrzeć na zmienną masę, ponieważ dotyczy to samobieżnych pocisków, takich jak rakiety. Kiedy raketa wytwarza siłę ciągu, aby przyspieszyć, traci masę (paliwo) w tym samym tempie. Kiedy całe paliwo zostanie zużyte (wypalenie), raketa nie wytwarza już siły ciągu i osiąga maksymalną prędkość. Po wypaleniu możesz traktować trajektorię rakiety tak, jak chcesz. Pocisk bez własnego napędu, jak wspomniano wcześniej. Jednakże, podczas gdy raketa wytwarza siłę ciągu, należy wziąć pod uwagę jego masową zmianę, ponieważ wpłynie to na jego ruch. W przypadkach, w których zmiana masy rozpatrywanego obiektu jest taka, że masa wyrzucana lub przyjmowana ma zerową bezwzględną prędkość, np. statek zużywający paliwo, można na przykład ustawić równania motonu, tak jak zwykle, gdzie suma sił równa się szybkości zmiany pędu. Jednak w tym przypadku masa będzie funkcją czasu, a równania ruchu będą wyglądały następująco:

$$\sum F = ma = d/dt(mv) = m(dv/dt) + (dm/dt)v$$

Możesz przystąpić do rozwiązywania ich tak, jak normalnie, ale mając na uwadze zależność masy od czasu. Z drugiej strony raketa wyrzuca masę o tej samej niezerowej prędkości i nie można użyć powyższego podejścia do właściwego uwzględnienia zmiany masy. W takim przypadku należy wziąć pod uwagę względną prędkość między masą wyrzuconą a samą dźwignią. Liniowe równanie ruchu wygląda teraz tak:

$$\sum F = m dv/dt + dm/dt u$$

gdzie u jest względną prędkością pomiędzy masą wyrzuconą a obiektem (w tym przypadku rakieta). Aby raketa poruszała się prosto w górę, zaniedbując opór powietrza i ciśnienie na dyszy wylotowej, jedyną siłą działającą na raketę jest grawitacja. Ale raketa wyrzuca masę (paliwo). To, w jaki sposób wyrzuca tę masę, nie ma tu znaczenia, ponieważ siły tam zaangażowane są wewnętrzne dla rakiety;

musimy tylko wziąć pod uwagę siły zewnętrzne. Niech szybkość spalania paliwa wynosi $-m'$. Równanie ruchu (w kierunku pionowym) dla rakiety jest następujące:

$$\begin{aligned}\sum F &= m \, dv/dt + dm/dt \, u \\ -mg &= m \, dv/dt - m' \, u\end{aligned}$$

Jeśli przestawisz to tak, aby wyglądało to tak, jakby istniał tylko termin m po prawej stronie równania, dostajesz.

$$m' \, u - mg = m \, dv/dt = ma$$

Tutaj widać, że ciąg, który wyrzuca raketę w powietrze, jest równy $m' \, u$. Ponieważ szybkość spalania paliwa jest stała, masa rakiety w każdej chwili jest równa

$$m = m_0 - m' \, t$$

gdzie m_0 jest początkową masą, a wskaźnik spalania, m' , ma postać masy na jednostkę czasu.