Matematyka dla projektantów gier

I : Operowanie równaniami i ich przedstawianie

Wbrew powszechnemu przekonaniu, matematyka nie jest językiem uniwersalnym. Przeciwnie, matematyka opiera się na ściśle określonych zbiorach definicji i zasad, których znaczenie zostało określone. Podobnie matematyka dla projektantów gier, która jest głównie zakresem algebraicznym, również opiera się na zbiorze definicji i zasad.

W tej części omówimy:

- Wybór układu współrzędnych
- Reprezentację równań
- Użycie korzeni wielomianu do rozwiązywania równań
- Zastąpienie

Wybór układu współrzędnych

Jedną z ważniejszych rzeczy, kiedy zabieramy się do pisania gier, jest system współrzędnych jaki zastosujesz. Każdy układ współrzędnych ma swoje własne zastosowania; to znaczy, każdy z nich jest przeznaczony do wykonywania określonych zadań. Chociaż istnieje wiele systemów współrzędnych, kilka z nich jest wyjątkowo dobrych dla pisania gier :

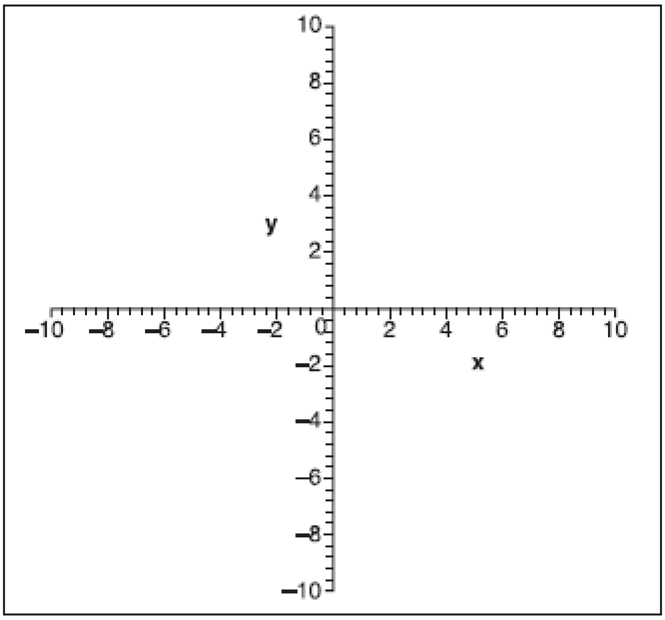
- współrzędne kartezjańskie
- współrzędne bipolarne
- współrzędne cylindryczne
- współrzędne sferyczne
- współrzędne liniowe

Ale zaraz, co to dokładnie jest współrzędna? Można zdefiniować współrzędną jako zbiór n zmiennych, które pozwalają ci na ustalenie obiektu geometrycznego. Oczywiście nie wszystkie rodzaje systemów współrzędnych są strasznie przydatne przy programowaniu gier.

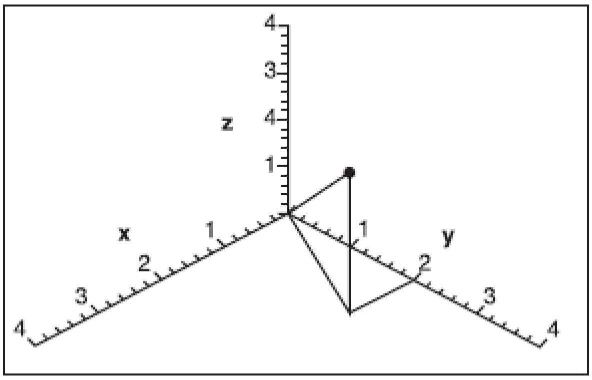
Wszystkie współrzędne będą przedstawiane w postaci wektorowej <a,b,c,..> o długości mniejszej lub równej n odpowiednich wymiarów przestrzeni.

Współrzędne kartezjańskie

Bez wątpienia, system kartezjański jest najszerzej znanym systemem współrzędnych. Jak pokazano poniżej, system ten jest prostoliniowym systemem współrzędnych - to znaczy, system, który ma kształt prostokąta w przyrodzie, a tym samym posiada współrzędne prostokątne. Każdy element w kartezjańskim systemie współrzędnych jest ortogonalny. Geometrycznie rzecz ujmując, oznacza to ,że każda oś przestrzeni jest prostopadła (90o) do innych osi. Ten system współrzędnych będzie punktem odniesienia do wszystkich innych układów współrzędnych tu omawianych, a wszystkie konwersje będą wykonywane z innych układów współrzędnych do tego. Zawsze będziemy umieszczali element x na osi poziomej, element y na osi pionowej a element z na osi prostopadłej (to znaczy, osi wychodzącej z papieru w twoją stronę. Przedział elementów jest [- ∞ ∞]. Dal przykładu nakreślimy <1,2,3> na systemie kartezjańskim 3D (możesz to zrobić sam). Wynik pokazany jest poniżej:



Współrzędne kartezjańskie 2 wymiarowe

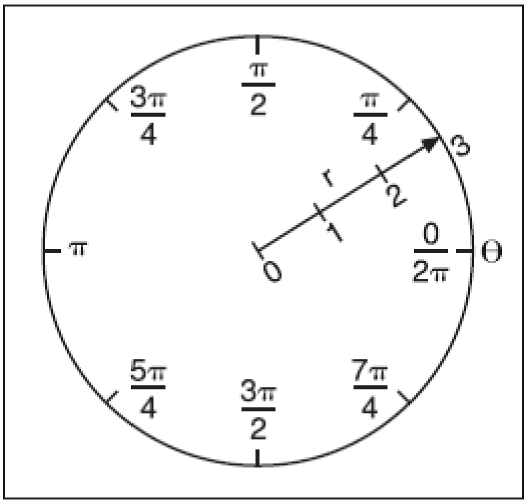


<1,2,3> naniesione na system kartezjański

Co ciekawe nie oznacza to ,że w kartezjańskim układzie współrzędnych można używać tylko układu x poziome y pionowe itd. Łatwo można zbudować system współrzędnych kartezjańskich, taki gdzie ,na przykład, osie z i y są odwrócone. Trzeba tylko pamiętać ,aby wsiąść to pod uwagę przy kreśleniu współrzędnych. Podobnie można określić , która oś jest ujemna a która dodatnia, zwane również ręcznością. Zwykle jest to związane ze zmianą znaku w głębi osi a linia ta jest rysowana od początku do dodatniej strony osi, generują tym samym coś co wygląda jak róg domu z punktu widzenia wewnątrz lub zewnątrz. Na przykład w 2D, używając dwuwymiarowej biblioteki renderowania, ekran jest umieszczony tak ,że oś y zmniejsza się kiedy idziemy w górę, ale oś x pozostaje ta sama. Oznacza to ,że początek jest w górnym lewym rogu, zamiast w dolnym lewym jak wskazuje kartezjański układ współrzędnych.

Współrzędne biegunowe

Dzięki podstawom trygonometrii, system współrzędnych biegunowych jest prawdopodbnie drugim najlepiej znanym systemem współrzędnych. Jak pokazano poniżej, system współrzędnych biegunowych jest promieniowym układem współrzędnych - to znaczy, systemem, który charakteryzuje się odległością od środka systemu współrzędnych. System ten jest systemem współrzędnych 2D,i ma właściwość bycia cyklicznym w jednym elemencie. Posiada dwa elementy: <r, Φ> r jest to elementem promienia i określa odległość od bieguna; Φ jest to współrzędna kątowa, i przedstawia kąt od arbitralnie zdefiniowanego punktu startowego



Z powodu swojej kolistej natury, system współrzędnych biegunowych jest dobrze dostosowany obrotów, które są wykonywane naturalnie z sumowaniem elementu kątowego. Zakres tego systemu współrzędnych to <[0,2π) .[0, ∞]>

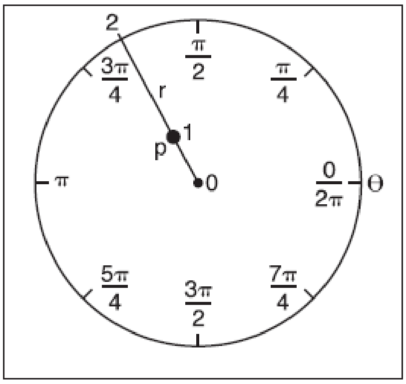
Można łatwo przekształcać ze współrzędnych biegunowych do współrzędnych kartezjańskich dzięki następującym związkom:

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

Odwrotnie, można skonwertować ze współrzędnych kartezjańskich do współrzędnych biegunowych następująco:

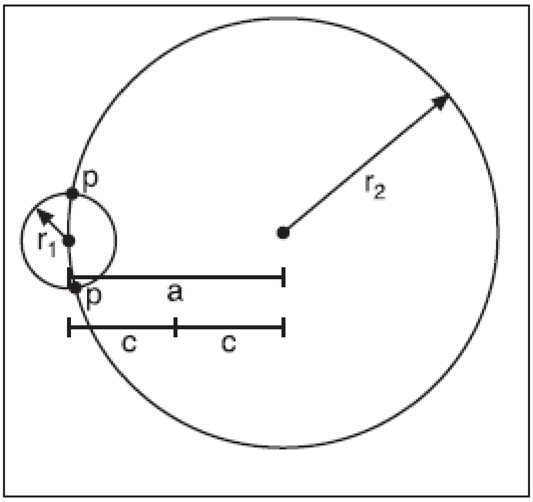
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Nanieśmy <1,2> na układ współrzędnych biegunowych.



Dwubiegunowy układ współrzędnych

W systemie biegunowym, wszystkie współrzędne były opisane kątem i długością. System dwubiegunowy, z drugiej strony, jest opisany dwoma długościami i dwoma kątami. Chociaż system współrzędnych dwubiegunowych nie jest bardzo popularnym systemem współrzędnych dla gier, ma swoje zastosowanie i sprawia ,że patrzymy na pewne sprawy inaczej. Jak sugeruje nazw, system współrzędnych dwubiegunowych jest wyposażony w dwa środki, a odległość między nimi może to być a. Dla matematycznego uproszczenia, niech a = 2c. Rozpatrzmy system współrzędnych dwubiegunowych, który jest opisany dwoma długościami ,r1 i r2 . Współrzędna opisana przez <r1,r2> jest to punkt przy którym te dwa koła o promieniu r1 i r2, oddzielone przez a, przecinają się. Dla tych okręgów, powinny istnieć dwa punkty przecięcia (zakładając ,że przecięcie istnieje). Podobnie jak w systemie współrzędnych biegunowych, zakres długości to [0, ∞]



Możemy konwertować z systemu dwubiegunowego do kartezjańskiego następująco:

$$r = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 - 2c^2}{2}}$$

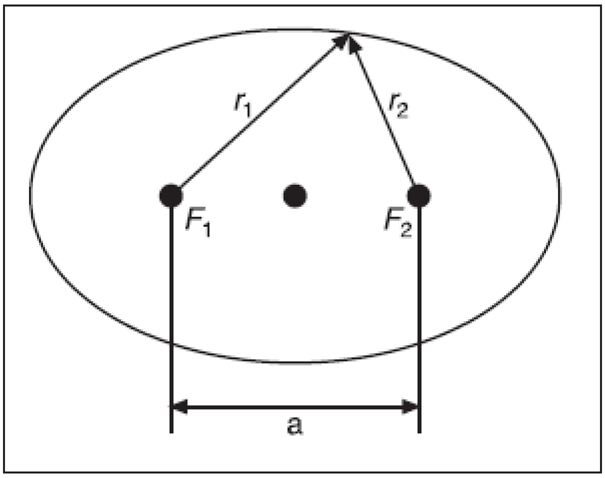
$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{r_2^4 - 2\left(4c^2 + r_1^2\right)r_2^2 - \left(4c^2 - r_1^2\right)^2}}{r_1^2 - r_2^2}\right)$$

Odwrotnie, możemy konwertować z systemu dwubiegunowego do kartezjańskiego następująco:

$$x = \frac{r_1^2 - r_2^2}{4c}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{16c^2 r_1^2 - \left(r_1^2 - r_2^2 + 4c^2\right)^2}}{4c}$$

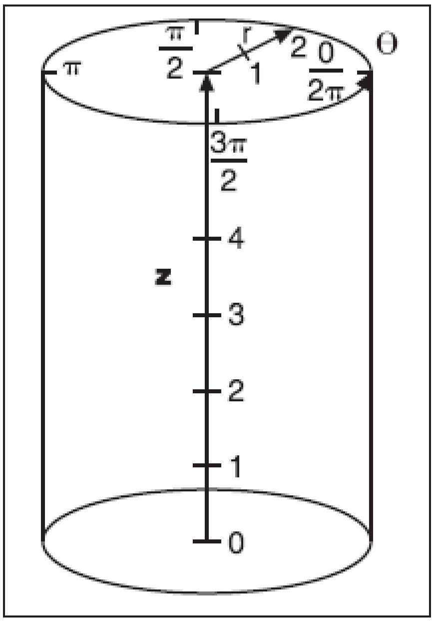
Dobrym wykorzystaniem tego systemu można przedstawić przez równanie elipsy. Elipsa może być łatwo wyrażona we współrzędnych dwubiegunowych, z dobrze znanych relacji między jej ogniskami, r1 + r2 = 2a



System dwubiegunowy tu pokazany jest trochę kłopotliwy ponieważ nie jednoznacznie określa pojedynczy punkt w przestrzeni. Spróbujmy zastosować tą samą ideę przecięcia używając kątów. Można zacząć myśleć o tym jak ta ogólna myśl może być zastosowana przy tworzeniu obiektów 3D, takich jak elipsoidy lub gładkie obiekty sferyczne.

Współrzędne cylindryczne

Jednym z ciekawszych systemów współrzędnych dla współrzędnych 3D jest system współrzędnych cylindrycznych. Ten system łączy współrzędne biegunowe z układem kartezjańskim. Jak sugeruje nazwa, współrzędne cylindryczne są zawarte w postaci cylindra, któy jest zdefiniowany przez trzy parametry : <r, ?, z>. Pierwsze dwa parametry są powiązane z przestrzenią biegunową i mają taką samą interpretację. Element z jest związany ze współrzędną kartezjańską z, i również służ ytemu samemu celowi. Taki zbiór współrzędnych może być bardzo użyteczny kiedy wymagane jest obracanie wokół pojedynczej osi, jak również kiedy transponujemy wzdłuż osi.



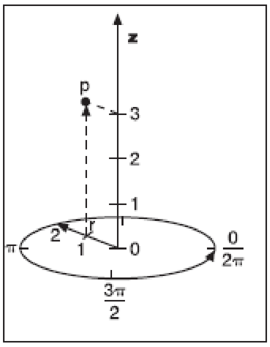
Zakres dla tych parametrów jest również taki sam jak ich dwa odpowiednie systemy współrzędnych: <[0,2π) , [0,∞], [-∞ ,∞]>. Konwersja z systemu cylindrycznego do kartezjańskiego jest łatwe dzięki tym samym związkom omówionym wcześniej :

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$
$$z = z$$

Konwersja odwrotna jest następująca:

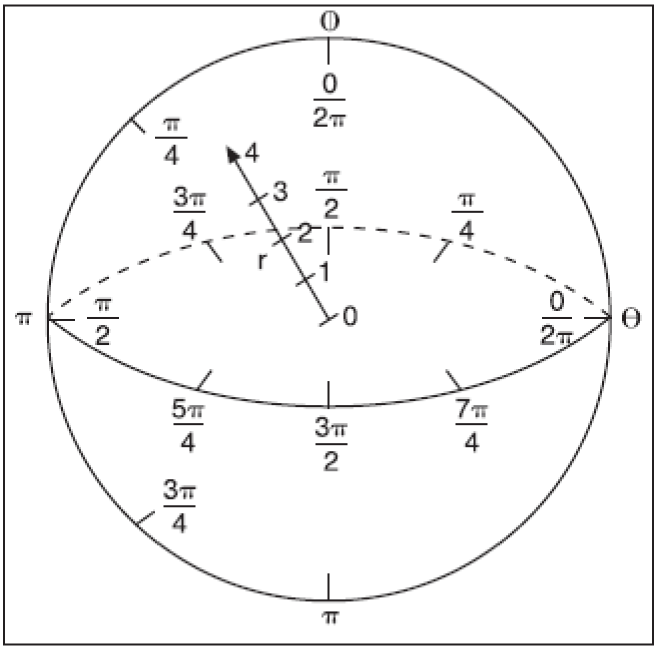
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$z = z$$

Jeśli chcesz umieścić <1,2,3> w takim systemie, wynik jest widoczny poniżej:



Współrzędne sferyczne

Kolejną oczywistą progresją z układu kartezjańskiego do cylindrycznego jest system współrzędnych sferycznych, pokazany poniżej:



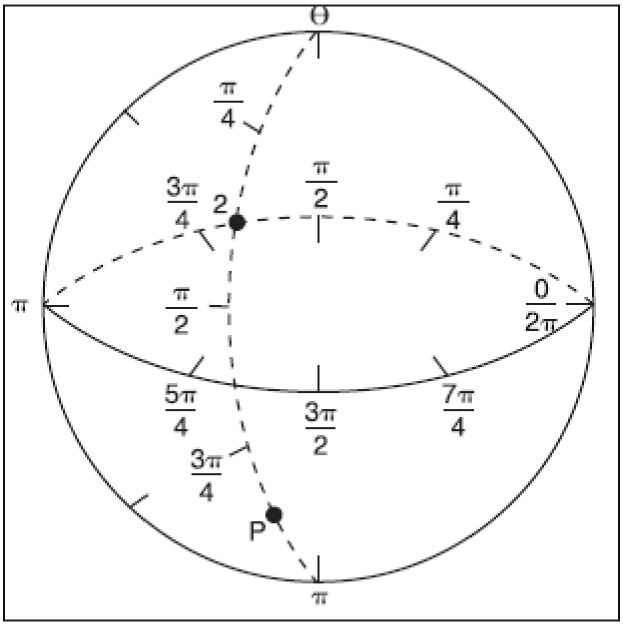
Podczas gdy współrzędne cylindryczne wprowadzają dodatkowy wymiar prostokątny do współrzędnych biegunowych, odnośnie głębokości (lub wysokości, w zależności od kąta), współrzędne sferyczne wprowadzają dodatkowy element do współrzędnych biegunowych aby mieć jednoczesny dostęp do wszystkich współrzędnych w 3D. Współrzędne sferyczne mają trzy parametry: <r,Φ ,θ>. Ten system w sposób naturalny wykonuje obrót wokół dwóch osi w przestrzeni 3D. Zakres tych parametrów to <[0,∞], [0,2π], [0 ,π]> .Zwróć uwagę ,ze drugi kąt nie jest ograniczony do 2π, co ma sens, bo jeśli by był, umożliwiałby objęcie wartości większych niż π, byłby w sytuacji w której współrzędna nie byłaby jednoznacznie określona przez trzy parametry, a tym samym zależności nie byłyby konieczne. Patrząc uważnie na problem geometrycznie, i z pewną pomocą trygonometrii, można wywnioskować ,ze konwersję ze współrzędnych sferycznych na kartezjańskie można uzyskać następująco:

$$x = r\cos(\phi)\sin(\theta)$$
$$y = r\sin(\phi)\cos(\theta)$$
$$z = r\cos(\theta)$$

Odwrotnie, możemy skonwertować z układu kartezjańskiego do współrzędnych sferycznych następującymi równaniami:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{z}{r}\right)$$

Jeśli chcemy wstawić współrzędne <1,2,3> do przestrzeni 3D :



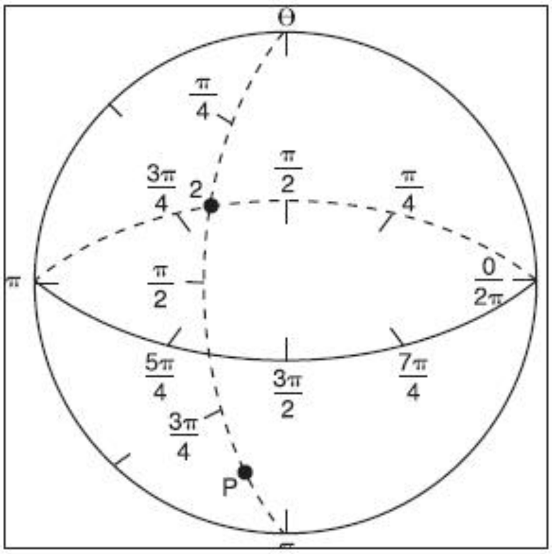
Reprezentacja Równań

Równanie jest formalnym wyrażeniem równości między dwoma matematycznymi wyrażeniami. Na przykład instrukcja jak x = a + 1 jest równaniem ponieważ składa się z równości między wyrażeniem x i a+1. Równania mogą być przedstawione na kilka sposobów. My skupimy się na trzech typach równań, każda ze swoimi wadami i zaletami. Jak zobaczysz, niektóre reprezentacje są bardzo dobrze przystosowane do pewnych zastosowań, i ,jak przy różnych systemach współrzędnych, każda reprezentacja równania ma swój „naturalny" sposób działania z pewnym typem problemów. W tej części, nauczysz się o trzech typach równań. Zobaczysz jak konwertować z jednego systemu do drugiego (jeśli to możliwe). Zrozumienie sposobu rozwiązywania równań jest kluczową i podstawową koncepcją, która będzie towarzyszyć Ci

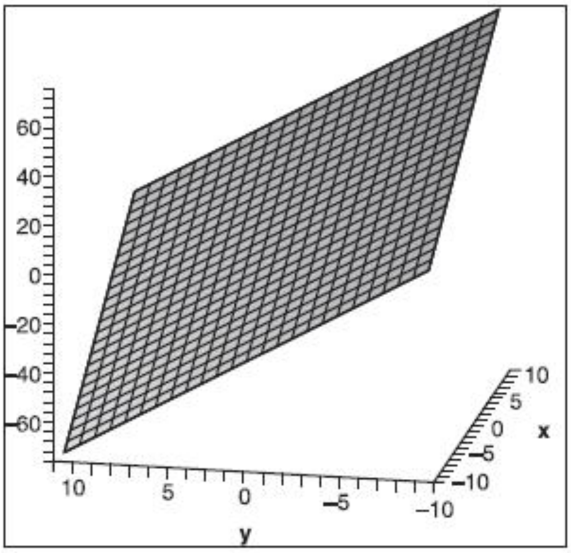
Czy Funkcja Jest Poprawna?

Najbardziej znanym sposobem przedstawiania równania jest funkcja. Funkcja może być niewłaściwie zdefiniowana jako relacja w której każdy zbiór danych wejściowych odwzorowywany jest do pojedynczej wartości. Ogólnie rzecz biorąc, masz funkcję ,jeśli jedna strona równania ma tylko jedną zmienną. W takim przypadku parametry wejściowe funkcji są zmiennymi po przeciwnej stronie równania. Funkcja jest zazwyczaj zapisywana jako f(x,y,z) ,gdzie x,y i z są parametrami funkcji. Na przykład f(x) = 2x+1 jest przykładem funkcji; dokładniej, jest równaniem linii. Mówiąc geometrycznie, przy wykresie funkcji 2D wykreślonej w układzie kartezjańskim, w której x reprezentuje oś poziomą , każda pionowa linia nieskończonej długości powinna przecinać się z wykresem nie więcej niż jeden raz. Dotyczy to również ogólnego przypadku. Jeśli myślisz w 3D, bardzo podobne obliczenia mogą zostać przedstawione przy użyciu płaszczyzny i wykresu 3D. Ponownie jest to prawda ponieważ twierdziliśmy ,że nie powinno być więcej niż jedna wartość na zestaw danych wejściowych. Oto kilka przykładów funkcji

$$y = \sqrt{x}$$
$$z = f(x, y)$$
$$= 3x - 4y$$



Wykres pierwiastka kwadratowego



Wykres płaszczyzny 3D

Notacja Parametryczna

Ten format opisu równania jest znacznie mniej restrykcyjny niż funkcja, ponieważ nie zmusza żadnej zmiennej do posiadania tylko jednej wartości na zestaw danych wejściowych. Pozwala swobodnie opisywać równania podając jedną funkcję dla każdej współrzędnej w układzie współrzędnych. Chociaż te równania pozwalają na bardziej liberalny ruch w przestrzeni, niektóre są nieco uciążliwe w pracy ponieważ mają więcej niż jedną wartość na zestaw danych wejściowych. Ponieważ te równania nie wnoszą unikalnej wartości na zbiór danych wejściowych, oczywiści nie mogą być konwertowane z formy parametryczne di formy funkcjonalnej. Poniższe przykład są równania mi w formie parametrycznej.

$$P_1 = \begin{Bmatrix} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{Bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{Bmatrix} x = 3t \\ y = 4t \end{Bmatrix}$$

Konwersja funkcji do notacji parametrycznej jest całkiem prosta: po prostu pozostawiamy wszystkie parametry wejściowe tak jak są, i czynimy wynik funkcji ostatnim parametrem . Nie przychodzi łatwiej niż to. Spójrzmy na przykłady

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} x=x \\ y=y \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{Bmatrix}$$

$$z=e^x+3y \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} x=x \\ y=y \\ z=e^x+3y \end{Bmatrix}$$

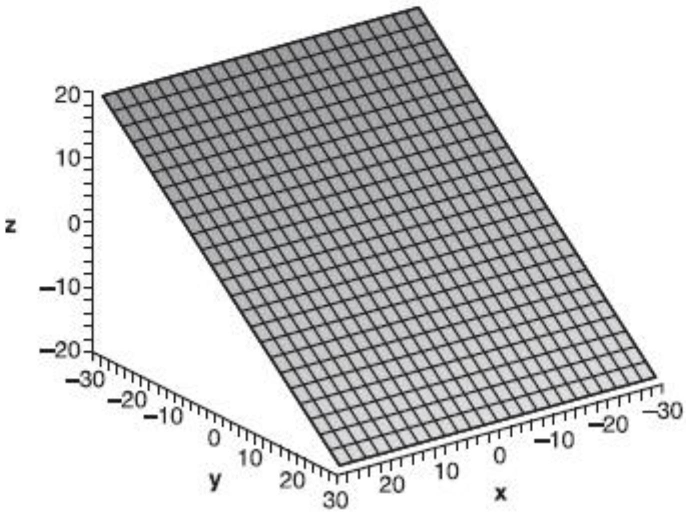
Wyzwaniem jest to, że chcesz konwertować z parametrycznych na funkcjonalne. Sztuczką jest tu wyodrębnienie parametrów i zastąpienie ich innymi równaniami. W niektórych przypadkach można uzyskać jedno równanie przez zastąpienie każdego parametru, ale można czasem spotkać się z taką sytuacją gdzie nie można już dłużej zastępować. To nie zawsze jest problem, to po prostu oznacza ,że jedna ze zmiennych nie jest w rzeczywistości ważna w stosunku do zmiennej ,którą wyodrębniliśmy. Oczywiście, możemy zgubić pewne informacje robiąc to ,ale konwertujemy równania do funkcji w razie potrzeby. Weźmy na przykład równanie płaszczyzny w 3D:

$$f=\begin{Bmatrix} x=3s \\ y=-3t \\ z=2t \end{Bmatrix}$$

$$t=-\frac{y}{3}$$

$$\begin{aligned} z&=2t \\ &=-\frac{2y}{3} \end{aligned}$$

Dla tego zbioru równań nie można wyodrębnić wszystkiego do pojedynczej zmiennej – co oznacza ,że albo nie można skonwertować tego równania na funkcję, lub to równanie będzie tracić pewne informacje, których nie można wyrazić przez funkcje w procesie konwersji (jak ma to miejsce). Jeśli przyjrzymy się wykresowi tego równania. zauważmy ,że wartość x nie ma znaczenia, ponieważ bez względu na wartość x, wysokość z jest cały czas taka sama. W konsekwencji, finalne równanie funkcjonalne staje się ostatnim równaniem wyrażony powyżej. Zatem, biorąc pod uwagę parametr y, możesz obliczyć z i arbitralnie wybrać x z aby uzyskać punkt spełniający równanie



Nie ma prostego triku na konwersję bardziej skomplikowanych równań. Najlepszą rzeczą jaką możesz zrobić, to spojrzeć na funkcje geometrycznie (jeśli to możliwe) aby zobaczyć czy ma tylko jedną wartość na osie. Aby to umożliwić , możesz chcieć rozważyć zmianę układu współrzędnych na te omówione wcześniej. Okrąg oczywiście nie jest funkcją ponieważ ma dwie wartości dla dowolnej linii poziomej i pionowej, ale jeśli zmienisz na współrzędne biegunowe, możesz skonwertować wszystko do funkcji ,jak pokazano

$$f = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{array} \right\}$$

$$r = \frac{y}{\sin(\theta)}$$

$$x = r\cos(\theta)$$

$$= \frac{y\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$= \frac{y}{\tan(\theta)}$$

Równania Chaotyczne

Ostatnim typem równań nie są równania parametryczne ani funkcjonalne – chociaż mogą początkowo wyglądać jak funkcjonalne. Problem polega na tym ,że nie można wyodrębnić jednej z ich zmiennych. Na przykład, spróbuj wyizolować dowolną zmienną w ($8 + 2 + x^2 = y^2 - y$) aby uzyskać funkcję . Szybko odkryjesz ,że jest to niemożliwe. Ogólnie rzecz biorąc te równania nie są łatwe do przekształcenia w inną reprezentację – rzeczywiści, uczynienie tego czasami jest niemożliwe algebraicznie. Konwersja ich z formy pierwotnej do formy parametrycznej czy funkcjonalnej wymaga różnych taktyk i technik. Odkryjemy jedną z metod , która w rzeczywistości może rozwiązać rodzinę podobnych problemów.

Używanie Pierwiastków Wielomianów Do Rozwiązywania Równań

Wielomiany są równaniami w postaci $y = a_n x^n + \ldots + a_i x^i + a_0 x^0$. Tu skupimy się na znajdowaniu pierwiastków wielomianów – innymi słowy, rozwiązanie algebraiczne dla x w równaniu $0 = a_n x^n + \ldots$

$a_i x^i + a_0$. Jak zobaczysz wkrótce, jest to coś więcej niż znalezienie skończonego zestawu rozwiązań dla x

Równania Kwadratowe

Równania kwadratowe są równaniami wielomianowymi drugiego stopnia – innymi słowy równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie {a,b,c} są stałymi a x jest zmienną o potędze co najwyżej dwa (stąd słowo drugiego). To co interesując w tych równaniach, to to ,że można łatwo określić wartości dla x. W szczególności, x ma dwie wartości, ale nie ma gwarancji ,że są prawdziwe. Skłonność do wyodrębniania x pochodzi z procesu zwanego „uzupełnieniem do pełnego kwadratu" (Proces ten może być również przydatny do działania z innymi problemami). Celem jest wyrażenie równania jako kwadrat x plus pewna wartość. Korzyść z tego jest taka ,że możesz określić pierwiastek kwadratowy po każdej stronie aby zakończyć jedną , pojedynczą wartością x. Prawdopodobnie znasz poniższe , ogólne rozwiązania równań kwadratowych

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

To równanie jest dobrze znane, i może być uzyskane przez uzupełnienie do pełnego kwadratu równania kwadratowego i wyodrębnienie dla x. Bardzo podobny wynik może być również uzyskany jeśli po prostu manipulujemy równaniami w inny sposób. Zaletą posiadani dwóch różnych równań jest to ,że ogólnie, precyzja zmiennoprzecinkowa jest bardziej stabilna, jak pokazano w poniższym dowodzie

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

$$a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0$$

$$a + c\left(\frac{1}{x^2} + \frac{b}{cx}\right) = 0$$

$$c\left(\frac{1}{x^2} + \frac{b}{cx} + \frac{b^2}{4c^2} - \frac{b^2}{4c^2}\right) = -a$$

$$c\left(\frac{1}{x^2} + \frac{b}{cx} + \frac{b^2}{4c^2}\right) = \frac{b^2}{4c} - a$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{b}{2c}\right)^2 = \frac{b^2}{4c^2} - \frac{4ca}{c^2}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{b}{2c} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$$

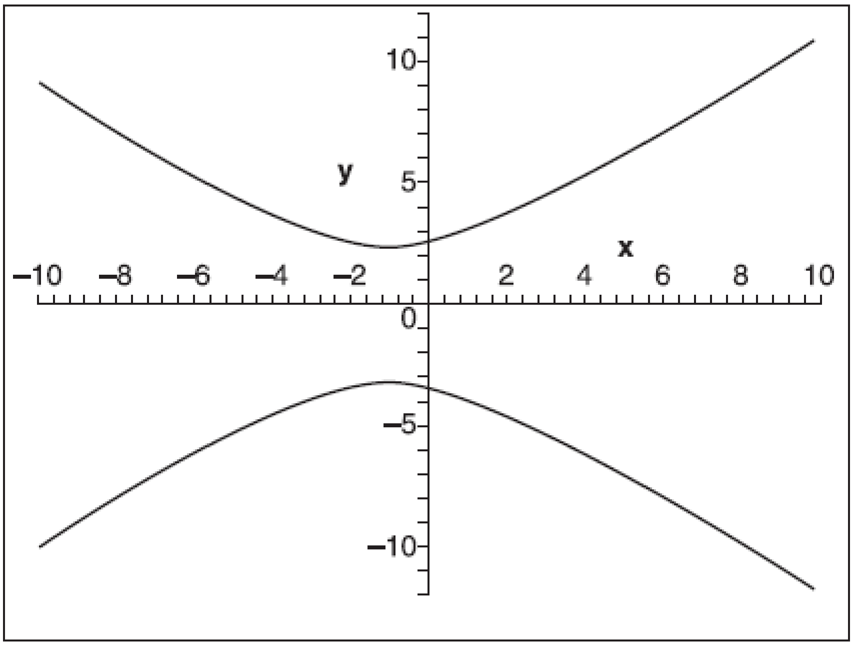
$$x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Kwadrat jest uzupełniany w czwartej linii, gdzie są dodawane dwa wyrazy anulowania , a jeden jest wyciągnięty przed nawiasy, tak więc równanie wynikowe może być łatwo skonwertowane do kwadratu o pewnej wartości, zmniejszając potęgę x. To równanie jest rzeczywiście interesujące ponieważ jest bardzo podobne do poprzedniego. Dolna część jest dokładnie taka sama jak jego część górna. Daje to ciekawą tożsamość, która może przynieść więcej stabilnych wartości zmiennoprzecinkowych dla dwóch różnych pierwiastków

$$q = \frac{1}{2}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

$$x = \frac{q}{a} = \frac{c}{q}$$

Teraz ,gdy mamy dwa rozwiązania dla równania kwadratowego, możesz rzeczywiście zrobić coś z równaniem $8 + 2x + x^2 + y^2 - y$. Tak długo jak jedna ze zmiennych jest częścią równania kwadratowego, można znaleźć rozwiązanie problemu. W tym przypadku, obie zmienne są częścią równania kwadratowego, co oznacza ,że obie zmienne mogą być wyodrębnione.



Wykres dla równania $8 + 2x + x^2 + y^2 - y$

Wyodrębnienie dla y daje nieco lepszy wynik , więc kontynuując

$$8+2x+x^2=y^2+y$$

$$0=y^2+y-\left(x^2+2x+8\right)=ay^2+by+c$$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\left(x^2+2x+8\right)}}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{33+4x^2+8x}}{2}$$

Nie jest to oczywiści funkcja, ponieważ zawsze ma dwie wartości dla dowolnej wartości y. Równanie to jest jednak funkcją częściową, co oznacza ,że przez podzielenie tego równania na fragmenty (w tym przypadku dwa),można skonstruować dobrze zdefiniowane funkcje. Oczywiści, przez oddzielne operacje plus/minus możesz to zrobić. Ponieważ pierwszy pierwiastek kwadratowy jest zdefiniowany tylko w przestrzeni rzeczywistej dla wartości dodatnich, dyskryminant, czyli wyrażenie rozróżniające między dwoma jednostkami (tu b^2 - 4ac) musi być większy niż lub równy 0 aby rozwiązanie było prawdziwe. Jeśli dyskryminant jest równy 0, wtedy istnieją dwa prawdziwe rozwiązania, które są dokładnie takie same. Jest to oczywiste ponieważ pierwiastek kwadratowy z zera wynosi zero, a zero nie ma wpływu na znak ujemny lub dodatni.

Równania Sześcienne

Jeśli udało ci się znaleźć rozwiązania równania kwadratowego, można pomyśleć, że podobny proces można przeprowadzić dla równań trzeciego stopnia. Oczywiście jest to możliwe. Dowód na to wyprowadzenie jest raczej żmudny, więc pominiemy go. Większość jest wykonywana przez zestaw zmiennych zastępujących, które zobaczysz wkrótce przy rozwiązywaniu równań trzeciego stopnia. Równania sześcienne są wielomianami w postaci $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, gdzie {a,b,c} są stałymi a x zmienną. Aby obliczyć rozwiązanie takiego równania, musisz dokonać obliczeń w kilku krokach, które pochodzą głównie z zastępowania wymagane przez dowód/wyprowadzenie. Najpierw musisz obliczyć dwie wartości:

$$Q=\frac{a^2-3b}{9}$$

$$R=\frac{2a^3-9ab+27c}{57}$$

Gdy masz te dwie wartości, musisz zweryfikować czy $R^2 < Q^3$:

$$\theta = \arccos\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right)$$

$$x_1 = -2\sqrt{Q}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{a}{3}$$

$$x_2 = -2\sqrt{Q}\cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) - \frac{a}{3}$$

$$x_3 = -2\sqrt{Q}\cos\left(\frac{\theta - 2\pi}{3}\right) - \frac{a}{3}$$

Jeśli $R^2 < Q^3$ jest błędne, wtedy musimy ponownie przeliczyć poniższe wartości

$$A = -\operatorname{sgn}(R)\sqrt[3]{|R| + \sqrt{R^2 - Q^3}}$$

$$B = \begin{cases} \dfrac{Q}{A} & A \neq 0 \\ 0 & A = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie jest podane następująco

$$x_1 = (A + B) - \frac{a}{3}$$

$$x_2 = -\frac{(A + B)}{2} - \frac{a}{3} + i\frac{\sqrt{3}(A - B)}{2}$$

$$x_3 = -\frac{(A + B)}{2} - \frac{a}{3} - i\frac{\sqrt{3}(A - B)}{2}$$

Zauważ ,że w tym scenariuszu istnieje jeden rzeczywisty pierwiastek. Aby zilustrować jak to działa weźmy równanie $x^3 + 5x^2 - 22x + 16$

$$Q = \frac{5^2 - 3(-22)}{9} = \frac{91}{9}$$

$$R = \frac{2 \cdot 5^2 - 9 \cdot 5(-22) + 27 \cdot 16}{54}$$

$$= \frac{1472}{54}$$

$$= \frac{836}{27}$$

Możesz chcieć zweryfikować czy $R^2 < Q^3$ (co jest prawdą w tym przypadku), dzięki czemu można przejść do kolejnego kroku

$$\theta = \arccos\left(\frac{\frac{836}{27}}{\sqrt{\left(\frac{91}{9}\right)^3}}\right) = 0.2727278932$$

$$x_1 = -2\sqrt{\frac{91}{9}}\cos\left(\frac{0.2727278932}{3}\right) - \frac{5}{3} = -8$$

$$x_2 = -2\sqrt{\frac{91}{9}}\cos\left(\frac{0.2727278932+2\pi}{3}\right) - \frac{5}{3} = -2$$

$$x_2 = -2\sqrt{\frac{91}{9}}\cos\left(\frac{0.2727278932-2\pi}{3}\right) - \frac{5}{3} = 1$$

x = [-8,1,2} , co ma sens jeżeli weryfikujesz poprzez odwrócenie procesu i mnożenie (x+8)(x-1)(x-2). Jeśli spojrzymy na krzywą jaka się generuje , można zobaczyć dlaczego użyliśmy takiego algorytmu. Jeśli taka krzywa przecunałą by się tylko w jednym miejscu, trzba by się uciec do drugiej ścieżki.

Równania czwartego stopnia

Podobnie jak w równaniach kwadratowych i trzeciego stopnia , można znaleźć rozwiązanie równań czwartego stopnia stosując zbiór podstawień i sprytnych sztuczek dla redukowania wyrazów. Możemy również wykorzystać wzory Vieta, lub podstawienia połączone z dwoma przejściami dla uzupełnienia kwadratu. Równania kwadratowe. Równanie kwadratowe jest kolejnym logicznym krokiem po równanniu wielomianu sześciennego. Równanie czwartego stopnia ma postać $x^4+ax^3+bx^2cx+d = 0$, gdzie {a,b,c,d} są stałymi a x jest zmienną. Ze względu na rosnącą złożoność pochodnych, podzielimy rozwiązanie na skończone kroki. Zacznijmy od obliczeń wstępnych

$$P = b - \frac{3a^2}{8}$$

$$Q = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c$$

$$R = d - \frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4}$$

Koljenym krokiem jest rozwiązanie równania sześciennego przez znalezienie dwóch jego niezerwoych pierwiastków rzeczywistych.

$$0 = y^3 + \frac{P \cdot y^2}{2} + \frac{\left(P^2 - 4R\right) y}{16} - \frac{Q^2}{64}$$

Jeśli to masz, niech s i t będą pierwiastkami kwadratowymi dwóch niezerowych pierwiastków poprzedniego równania (pierwiastek rzeczywisty jest oczywiście łatwiejszy do obliczenia), w celu zdefiniowania kolejnych dwóch zmiennych

$$U = -\frac{Q}{8st}$$
$$V = \frac{a}{4}$$

Następnie mamy zdefiniowane cztery pierwiastki równania czwartego stopnia ‘

$$x_1 = S + T + U - V$$
$$x_x = S - T - U - V$$
$$x_3 = -S - T + U - V$$
$$x_4 = -S + T - U - V$$

Jako przykład weźmy $x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 94x - 120 = 0$

$$P = -9 - \frac{3(-6)}{8} = -\frac{45}{2}$$
$$Q = \frac{(-6)^3}{8} - \frac{(-6)(-9)}{2} + 94 = 40$$
$$R = d - \frac{3(-6)^4}{256} + \frac{(-6)^2(-9)}{16} - \frac{(-6)94}{4} = -\frac{231}{16}$$

$$0 = y^3 + \frac{\left(-\frac{45}{2}\right)y^2}{2} + \frac{\left(-\frac{45^2}{2} - 4\left(-\frac{231}{16}\right)\right)y}{16} - \frac{40^2}{64}$$
$$y = \left\{1, 4, \frac{25}{4}\right\}$$

$$S = 1$$
$$T = 4$$
$$U = -\frac{40}{8 \cdot 1 \cdot 4} = -\frac{5}{2}$$
$$V = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1 + 4 - \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 2$$
$$x_2 = 1 - 4 + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 3$$
$$x_3 = -1 - 4 - \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -4$$
$$x_4 = -1 + 4 + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 5$$

Istnieją również rozwiązania częściowe dla równań czwartego rzędu, ale nie ma ogólnego rozwiązania dla tego rodzaju równań. Ogólnie rzecz biorąc, aby określić czy można znaleźć rozwiązanie danego częściowego równania wielomianowego jest zawsze taki sam : spróbuj rozważyć równanie w równaniu dwumianowy $(ax+b)^n$, które jest doskonałą potęgą. Kiedy to zrobisz, możesz pobrać n-ty pierwiastek kwadratowy a x będzie wyodrębnione. Aby uzyskać równanie po jednej stronie w tym formacie, musisz wykonać kilka podstawień.

Podstawienia

Podstawienie jest bardzo potężnym narzędziem, które może być użyte do rozwiązywania pewnego rodzaju równań. Użyłeś podstawień do pewnego stopnia, kiedy uczyłeś się o różnych systemach współrzędnych, ale lepiej przyjrzeć się metodom i sztuczkom, których można użyć do uproszczenia równań – lub nawet dla uzyskania dobrze sformułowanych wzorów dla równań, których nie miałeś początkowo. Podstawienia mogą być postrzegane jako sposób na wyrażenie tego samego pojęcia ,co oryginalne równania, ale przez zniekształcenie ścieżki, która przechodzi od A do B. W układach współrzędnych, zbiór danych wejściowych jest zniekształcony aby uzyskać nowy układ współrzędnych. Zniekształcenia nie zawsze muszą mieć wpływ na końcowy wynik. Jeśli zastosujesz odwrotne podstawienie na końcu procesu algebraicznego, nie powinieneś niczego zmieniać przechodząc od A do B. Jako przykład , weźmy równanie : $2x^2+3x-5$ i spróbujmy usunąć wszystkie wyrazy pierwszego rzędu w x z podstawieniem x= y+a, gdzie a jest liczbą rzeczywistą.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2+3x-5 \\ &= 2(y+a)^2+3(y+a)-5 \\ &= 2y^2+4ya+a^2+3y+3a-5 \\ &= 2y^2+y(4a+3)+a^2+3a-5 \end{aligned}$$

Teraz chcesz aby wyraz pierwszego rzędu był zerem, co implikuje

$$\begin{aligned} 4a+3&=0 \\ a&=-\frac{3}{4} \\ f(y)&=2y^2+\frac{9}{16}+3\left(-\frac{3}{4}\right)-5 \\ &=2y^2-\frac{49}{8} \end{aligned}$$

Mówiąc geometrycznie, zastosowane podstawienie jest poziomym tłumaczeniem trzech czwartych w prawo. W tym momencie nie zmieniliśmy wcale tej funkcji, ponieważ równanie jest wyrażone wyrazem y a nie wyrazem x. Jeśli chcesz by równanie było funkcją x, wtedy musisz zastosować odwrotny proces : y = x – a. Więc na przykład jeśli chcesz znać wartość f(x) dla x = 4, musisz obliczyć f(4 + _) dla f(y), co daje 39, taką samą odpowiedź co f(x) dla x = 4. Ta metoda jest szczególnie interesująca dla złożoności obliczeniowej, ponieważ z powodzeniem zmniejsza ilość mnożeń do prostego odejmowania. Podstawienie pozwala również skonwertować brzydkie równanie w funkcję lub formę parametryczną z dość interesująca sztuczką. Korzystając z poprzedniego przykładu o równaniu kwadratowym, załóżmy ,że jesteś zainteresowany tylko zakresem x = [-10, 10] dla tego równania. Przez zastosowanie podstawienia , możesz zrobić tak ,że równanie przyjmuje tylko wartości dodatnie jako dane wejściowe. Następnie można wykorzystać tę symetrię równania w celu uwzględnienia obu przypadków w tym równaniu. Jeśli możesz to osiągnąć pomyślnie przekształcisz równanie w funkcję. Zauważ następującą logikę:

$$y = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{33 + 4x^2 + 8x}}{2}$$

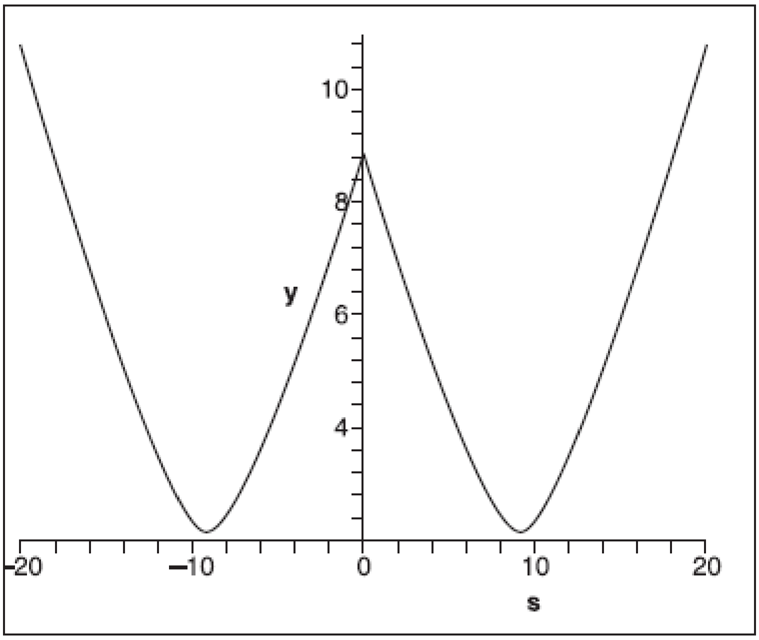
Wykonajmy podstawienie x = s-10. Zmienia to również domenę dla x na [-10 + 10, 10 + 10] = [0,20]

$$y = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{33 + 4(s-10)^2 + 8(s-10)}}{2}$$

$$t = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{353 + 4s^2 - 72s}}{2}$$

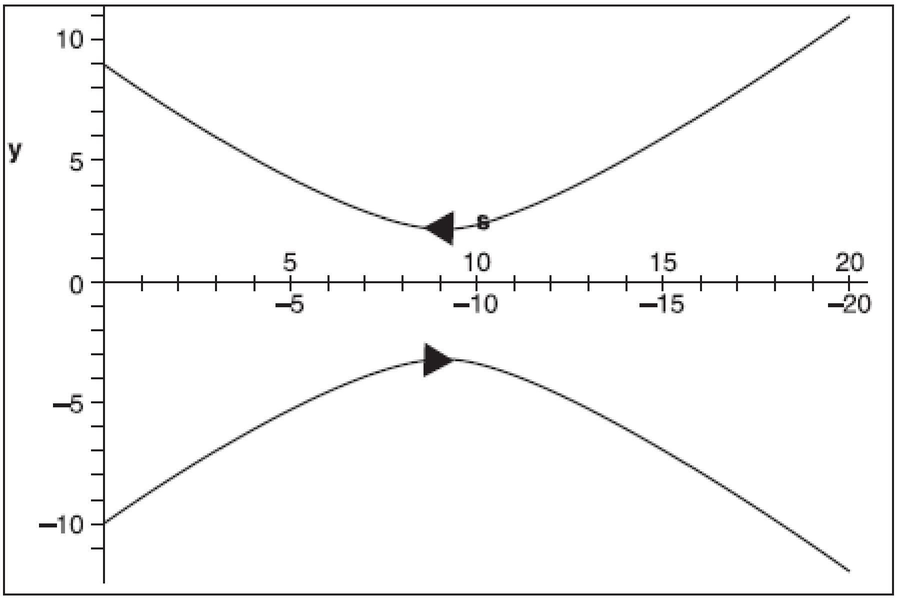
W tym równaniu, oczekuje się ,że s zawsze będzie większe niż 0, więc możesz zastąpić s dla absolutnej wartości s bez zmiany czegokolwiek. Zauważ również ,że s^2 jest zawsze dodatnie bez względu na znak s. Kluczem do rozwiązania tego jest fakt ,że można przechowywać informację przy użyciu znaku s ,tak aby obejmował [-20,20] i dodanie dodatkowej logiki w równaniu dla zmiany znaku, gdy s jest ujemne. Zwróć uwagę na następującą zmianę w równaniu i jego wynik

$$t = -\frac{1}{2} + \operatorname{sgn}(s) \frac{\sqrt{353 + 4s^2 - 72|s|}}{2}$$



Nie rozwiązuje to całkowicie problemu; po prostu generuje inną, lustrzaną krzywą w ujemnym kwadrancie x. Można się było spodziewać, ponieważ wiesz ,że funkcja może mieć tylko jedną wartość dla każdego wejścia, podczas gdy notacja parametryczna nie ma takiego ograniczenia, Finalna sztuczka dla rozwiązania tego problemu jako równania parametrycznego jest po prostu zwrócenie uwagi ,że s zawsze powinno być dodatnie; bez względu na to co się wydarzy .Ten ostatni fakt daje następujące równanie i wykres, które jest dokładnie takie jak w pierwszym równaniu, ale tłumaczone przez 10 – co oznacza ,że podstawienie s = x + 10 może skonwertować wartości dla x na dobrze zdefiniowane wartości dla s.

$$f(s)=\left\langle |s|, -\frac{1}{2}+\operatorname{sgn}(s)\frac{\sqrt{353+4s^2-72|s|}}{2} \right\rangle$$



Jeśli widzisz różnicę między +0 a -0, jak format zmiennoprzecinkowy IEEE, jest to w pełni poprawne równanie. Jeśli nie możesz rozróżnić tych dwóch wartości, wtedy masz problem , ponieważ 0 nie ma zdefiniowanego znaku, i w rezultacie równanie nie jest zdefiniowane