II. Wprowadzenie do wektorów

Prawdopodobnie wiesz już co nieco o wektorach. W rzeczywistości mógłbyś pominąć tą część, ale może lepiej nie? Będzie to dobry wstęp do bardziej zaawansowanych tematów , którymi zajmiemy się później. Po drodze, możesz znaleźć nowe i intersujące sposoby spojrzenia na rzeczy, i nowe spojrzenie na związki między niektórymi elementami.

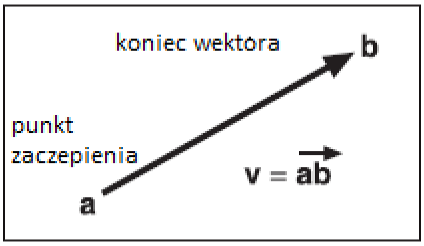
Wektory są bardzo abstrakcyjną koncepcją i może być stosowana do wielu różnych rzeczy. My interesujemy się wektorami przede wszystkim w odniesieniu do tego, jak odnoszą się do liczb rzeczywistych; z tego powodu niektóre definicje i relacje jakie tu znajdziesz, działają tylko dla liczb rzeczywistych

O Wektor, Co Ty?

Wektor dla matematyki, jest tym, czym tablica dla programowania. Oba pozwalają traktować kilka fragmentów informacji jako pojedynczy element. Dzięki tej pseudo-definicji, możesz pomyśleć ,że współrzędna jest wektorem, ale nie całkiem bezpośrednio. Wektor ma kierunek i wielkość i nie ma stałej pozycji w przestrzeni .Można twierdzić, że współrzędna jest wektorem od początku układu. Z tego powodu i ze względów praktycznych, będziemy używali notacji wektorowej dla współrzędnych (identyfikowane przez pogrubioną czcionkę). Na przykład, załóżmy ,że chcesz przypisać kierunek do punktu w przestrzeni. W takim przypadku potrzebne są dwie rzeczy : jedna współrzędna i jedne wektor.

Chociaż wektory nie przypominają współrzędnych jako takich. są one dość podobne do współrzędnych biegunowych, ponieważ oba są opisane wielkością (długością) i kierunkiem (kąt).

Innym sposobem postrzegania wektora jest postrzeganie go jako współrzędnej przesunięcia, jako początkowo wspomniano, z rozciągniętą definicją współrzędnej jako wektora z początku układu. Wektor jest definiowany przez n współrzędnych, gdzie każdemu komponentowi jest zazwyczaj przypisywana jedna oś w systemie współrzędnych. Możesz również wywołać te n-wektorów. Większość aplikacji wykorzystujących wektory , używa 2 i 3 wektorów. Wektory są powszechnie wyrażane w kartezjańskimi systemie współrzędnych <x,y,z,…>, ale możesz użyć tych samych zasad w innym systemie współrzędnych, takim jak współrzędne biegunowe, na przykład <θ,r>. W rzeczywistości można zdefiniować wektor w dowolnym układzie współrzędnych . Aby to zrobić, używamy pojęcia koniec wektora i punktu zaczepienia. Wektor zaczyna się punktem zaczepienia a kończy końcem wektora. W systemie kartezjańskim, wektor jest zazwyczaj wyrażany jako dwie współrzędne w przestrzeni – na przykład **a** i **b.** Wektor **ab** (to znaczy, wektor między a i b , tej kolejności), zaczyna się od (punktu zaczepienia) a i kończy przy b (punkt końcowy). Zatem współrzędna **p** w systemie współrzędnych może by faktycznie postrzegana jako wektor **0p**, gdzie **0** jest początkiem układu



Aby obliczyć wartość tego wektora, powinieneś użyć poniższego:

ab = b – a

Podobnie, jeśli masz współrzędną **a** i wektor **v** ,możesz znaleźć drugą współrzędną **b** przez proste odwrócenie tego procesu

b = a + v

Wektora **ab** , w poprzednim równaniu nie można mylić z a razy b . My będziemy dla operacji mnożenia używali operatora mnożenia. Początkowo może być to mylące ,ale wektory używają swojego zwane przestrzenią wektorową, która jest względna a nie absolutna. Na przykład, jeśli rozszerzymy pierwsze równanie o składowe dla współrzędnych biegunowych, otrzymujemy co następuje:

$$\mathbf{v} = \langle r, \theta \rangle = \langle a_r, a_\theta \rangle - \langle b_r, b_\theta \rangle$$

Geometrycznie wektor może być postrzegany jako strzałka. Strzałka wskazuje kierunek, dzięki czemu można odróżnić punkt zaczepienia od końca wektora. Ponieważ wektory w rzeczywistości nie mają początku, punkt zaczepienia może być umieszczony gdziekolwiek w przestrzeni współrzędnych. Jedynym ograniczeniem jest to ,że koniec wektora musi leżeć w określonej odległości od punktu zaczepienia. Na przykład wektor <1,2,3> , który jest zapisywany podobnie do współrzędnej, oznacza ,że punkt zaczepienia jest oddzielony od końca wektora liczbami ze znakiem <x =1, y = 2, z = 3>

Podstawowe Operacje i Właściwości

Sam wektor nie jest tak użyteczny. Aby dowolny element był przydatny, musisz zdefiniować zbiór działań ,które można zastosować do niego. Jasne jest ,że działania jakie definiujesz, muszą mieć jakąś przydatność lub po prostu robisz matematykę dla czystej przyjemności robienia matematyki, a nie tworzenia gier,

Inwersja Kierunku

Wektor ma kierunek; jest on podany. Ale jak odwrócić kierunek wektora? Jeśli myślisz o problemie geometrycznie, jest to bardzo proste. Koniec staje się punktem zaczepienia, a punkt zaczepienia końcem wektora. Na przykład, załóżmy ,że wektor ab jest zdefiniowany i chcesz określić odwrotności tego wektora. Aby to zrobić , wystarczy zamienić a i b, a otrzymasz ba. To takie proste. Jeśli myślisz o wektorach pod kątem współrzędnych kartezjańskich, odwrócenie wektora jest sprawą prostą zamiany dwóch współrzędnych – co, jak się okazuje, jest dokładnie tym co pomnożenie wszystkiego przez -1. Krótko mówią, odwrócenie kierunku wektora jest całkiem proste. Możesz po prostu pomnożyć każdą z jego współrzędnych przez -1, i voila.

Cześć! Moje Imię To Norma

Jak wspomniano wcześniej, wektor jest zdefiniowany jako mający wielkość i kierunek. Widziałeś różne aspekty kierunku wektora, ale nie zbadałeś jeszcze kwestii wielkości, zwanej także normą. Norma wektora, która może być przedstawiana jako pojedynczy pasek lub podwójne paski, jest definiowana następująco:

$$\sqrt[2]{|1|^2 + |-2|^2 + |3|^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}$$

Może dziwić ,że chociaż to równanie jest ogólnie przyjęte jako definicja normy wektora, jest ono w rzeczywistości tylko częściowo dokładne. W rzeczywistości, norma w sensie ogólnym jest definiowana jako funkcja przypisująca długość, rozmiar lub zakres badanemu obiektowi. Nie jest związany z jedną określoną formułą Powszechnie stosowana norma wektora, jak stwierdzono w poprzednim równaniu,

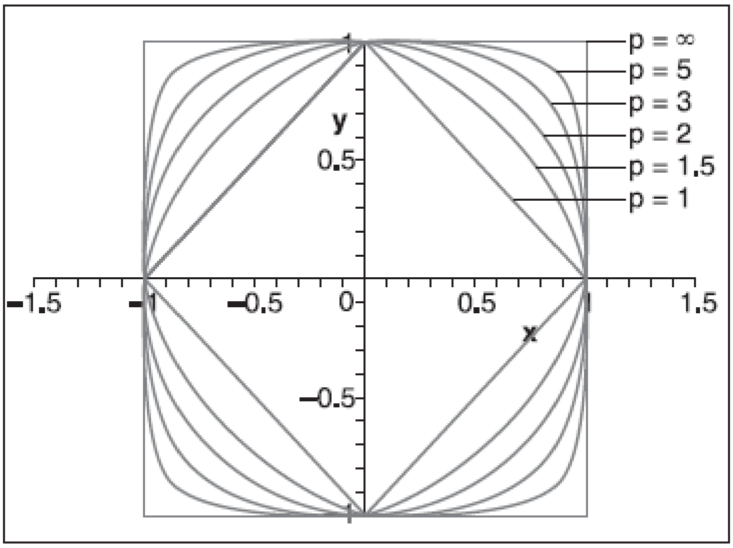
,pasuje tylko do jednej grupy norm zwanych p-normami. Dokładniej, jest zdefiniowana jako 2-norm. p-norma zdefiniowana dla p jest większa lub równa 1 jest następująca:

$$\sqrt[2]{|1|^2+|-2|^2+|3|^2}=\sqrt{1^2+2^2+3^2}$$

Każda z tych norm jest w rzeczywistości odpowiednikiem. Oznacza to ,że jeśli wybierzesz dowolne dwa wektory – powiedzmy s i t – i jeśli norma s jest mniejsza niż t, wtedy to samo będzie prawdziwe dla każdej p-normy, niezależnie od wartości wybranej dla p. Podobnie możesz podać przeciwnie jeśli t jest mniejsze niż s. Poniższa tabelka pokazuje normy wyliczone dla różnych wartości p w p-normie.

p	Expression	*p*-Norm Value
1	$\sqrt[1]{\lvert 1\rvert+\lvert -2\rvert+\lvert 3\rvert}=\lvert 1\rvert+\lvert -2\rvert+\lvert 3\rvert$	6
2	$\sqrt[2]{\lvert 1\rvert^2+\lvert -2\rvert^2+\lvert 3\rvert^2}=\sqrt{1^2+2^2+3^2}$	3.7416…
5	$\sqrt[5]{\lvert 1\rvert^5+\lvert -2\rvert^5+\lvert 3\rvert^5}$	3.0052…
∞	$\sqrt[\infty]{\lvert 1\rvert^\infty+\lvert -2\rvert^\infty+\lvert 3\rvert^\infty}=\max\{\lvert 1\rvert,\lvert -2\rvert,\lvert 3\rvert\}$	3

Jedna rzecz może przykuć Twoją uwagę w powyższej tabeli, norma nieskończoność (∞). Norma ∞ jest definiowana jako maksymalna wartość bezwzględna jednego składnika. Jeśli spojrzysz na normy dla rosnących wartości p, zobaczysz ,że wartości zbiegają się do 3. Aby zobaczyć graficzną reprezentację różnych wartości p-normy do wartości wejściowych w 2D, spójrz na to :



Wiele już powiedziano o p-normie, ale nie jest to jedyna norma której można użyć. Aby norma była w ogóle użyteczna, musisz przestrzegać ustalonego zestawu reguł zdefiniowanych następująco:

a) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$

b) $\|\mathbf{v}\| = 0 \leftrightarrow \mathbf{v} = 0$

c) $\|k\mathbf{v}\| = |k| \|\mathbf{v}\|$

d) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

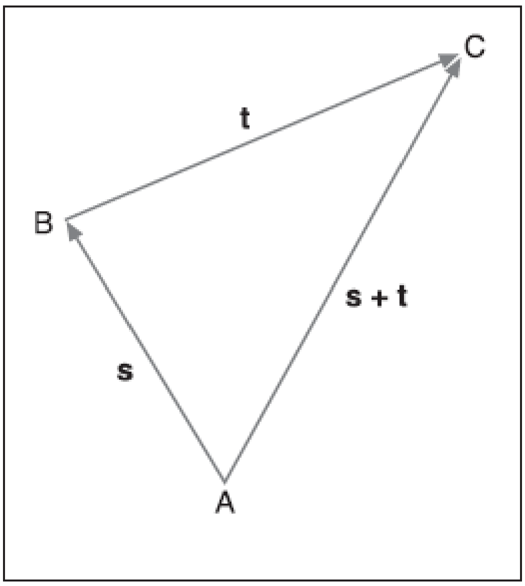
Biorąc pod uwagę te zasady, możesz wymyślić własną normę , jeśli nie lubisz ogólnie przyjętej 2-normy. Logika wciąż pozostaje. Ładniejsze wyniki mogą być uzyskiwane z 2-normą, z powodu jej kolistej natury. Zanim przejdziemy dalej. Istnieje jeszcze jedna koncepcja związana z normami, którą musisz uchwycić. Możemy powiedzieć ,że element jest normalny, jeśli ma normę 1 . Jeśli element nie jest normalny, wtedy możemy znormalizować wektor dzieląc przez jego normę. Na przykład chcąc znormalizować <1, -2, 3>, zastosujemy następującą logikę dla 2-normy:

$$\frac{\langle 1, -2, 3 \rangle}{\|\langle 1, -2, 3 \rangle\|_2} = \frac{\langle 1, -2, 3 \rangle}{3.7416} = \langle 0.2672, -0.5345, 0.8017 \rangle$$

Zatem, gdy tylko potrzebujesz czegoś związanego z odległością, wybór normy naprawdę należy do Ciebie. Nic tak naprawdę nie mówi, że 3-norma jest lepsza niż wszystkie pozostałe. Ta 2-norma jest dobra ze względu na jej kolistą naturę, ale 1-norma i norma nieskończoności mogą być równie użyteczne – na przykład w wykrywaniu kolizji

Dodawanie wektorów

Jedną z najbardziej podstawowych operacji jest dodawanie. Na szczęście, wektory są łatwe w dodawaniu. Aby zrozumieć w jaki sposób dodawanie działa z wektorami, ponownie zastanówmy się jak wektor będzie przetwarzany w świecie kartezjańskim. Jeśli dodałeś dwa wektory **s= ab** i **t =bc,** mamy trzy współrzędne a,b i c. Przypomnijmy ,że wektor a może być zdefiniowany przy użyciu dwóch współrzędnych. Jeśli dodałbyś **s** i **t,** w tej kolejności, pierwszy punkt zaczepienia byłby przy a, a jego koniec byłby przy b; drugi punkt początkowy wektora będzie przy b a jego koniec przy c. Dodawanie ma zatem postać **s** + **t** = **ab** + **bc** = **ac** (wektor, lub jeśli wolisz przesunięcie między **a** i **c**)



Jest to geometryczny sposób dodawania wektorów. Gdy dodajesz dwa wektory, musisz zawsze dołączyć punkt początkowy drugiego wektora do końca pierwszego wektora, ponieważ wektory nie działają w świecie absolutnym ale w świecie opisanym przez przesunięcia. Jeśli obliczamy wszystko krok po kroku, uzyskamy:

$$\begin{aligned}
\mathbf{s} &= \langle \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{b}_n - \mathbf{a}_n \rangle \\
\mathbf{t} &= \langle \mathbf{c}_1 - \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_2 - \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{c}_n - \mathbf{b}_n \rangle \\
\mathbf{s} + \mathbf{t} &= \langle \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1 + \mathbf{c}_1 - \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{c}_2 - \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n - \mathbf{a}_n + \mathbf{c}_n - \mathbf{b}_n \rangle \\
&= \langle \mathbf{c}_1 - \mathbf{a}_1, \mathbf{c}_2 - \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{c}_n - \mathbf{a}_n \rangle
\end{aligned}$$

Dodawanie wektorów jest zdefiniowane w taki sposób ,że po prostu wystarczy dodać każdy podobny komponent razem . Tak więc, podane wektory **s** i **t** , możemy zdefiniować ich dodawanie następującym równaniem:

$$\mathbf{s} + \mathbf{t} = \langle \mathbf{s}_1 + \mathbf{t}_1, \mathbf{s}_2 + \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{s}_n + \mathbf{t}_n \rangle$$

Podobnie możemy zdecydować ich odejmowanie, po prostu odwracając drugi wektor, mnożąc wszystkie jego składniki przez -1. Jeśli to zrobimy, szybko zauważymy ,że przez wzgląd na regułę dodawania, możesz zdefiniować regułę odejmowania :

s + t = s + (-t)

Kiedy chcemy dodawać wektory przy użyciu ich współrzędnych, możesz po prostu uprościć wyrażenie jak powyżej. Możesz zastąpić te dwa wektory przez bardziej bezpośredni wektor generowany przez punkt zaczepienia pierwszego i koniec drugiego, jak pokazano na powyższym rysunku .Jeśli myślisz o wektorach jako przesunięciach, możesz wyraźnie zobaczyć ,że dodawanie dwóch offsetów jest naprawdę takie samo , jak wyrażenie tego jako jednego przesunięcia (który jest naprawdę sumą dwóch początkowych przesunięć). Na przykład ,jeśli Michał idzie dwa kilometry, a potem odwraca się i wraca kilometr, znajduje się kilometr od swojej początkowej pozycji. Jako przykład bardziej złożony zastanówmy się nad sumowaniem zbioru wektorów. Można to uprościć w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
s &= (\mathbf{ab} + \mathbf{be}) + \mathbf{ed} + \mathbf{fg} - \mathbf{fa} \\
&= \mathbf{ae} + \mathbf{ed} + \mathbf{fg} + \mathbf{af} \\
&= (\mathbf{ae} + \mathbf{ed}) + (\mathbf{af} + \mathbf{fg}) \\
&= \mathbf{af} + \mathbf{ag}
\end{aligned}$$

Algebraicznie, wektory mogą być manipulowany przy użyciu wielu praw, które bierzesz za pewniki z liczbami rzeczywistymi. Co ważniejsze , można użyć co następuje:

a) $\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{t} + \mathbf{s}$
b) $(\mathbf{s} + \mathbf{t}) + \mathbf{r} = \mathbf{s} + (\mathbf{t} + \mathbf{r})$
c) $(ab)\mathbf{s} = a(b\mathbf{s})$
d) $a(\mathbf{s} + \mathbf{t}) = a\mathbf{s} + a\mathbf{t}$
e) $(a + b)\mathbf{s} = a\mathbf{s} + b\mathbf{s}$

Zaawansowane Operacje I Właściwości

Kiedy mówimy o zawansowanych operacjach, „zaawansowane” jest pojęciem względnym. Operacje zaawansowane są po prostu operacjami bardziej złożonymi niż podstawowa matematyka elementarna. Matematycy zdefiniowali większość z tych operacji, zmuszając ich do przestrzegania określonego zestawu reguł, a następnie udowodnienia różnych wyników przy założonej regule. Jest to bardzo podobne di tego, co widzieliśmy przy normie, gdzie norma jest ogólnie definiowana za pomocą zestawu reguł, i gdzie możesz zdefiniować, jeśli sobie życzysz, bardziej szczegółowe przypadki ogólnego zestawu. Działania, którym się przyjrzymy, należą do drugiej grupy. Operacje te są specyficznymi przypadkami bardziej ogólnej grupy.

Iloczyn skalarny [kropkowy]

Niewłaściwie, iloczyn kropkowy jest nazywany czasami iloczynem wewnętrznym. Chociaż jest to częściowo poprawne, ponieważ iloczyn kropkowy należy do tej rodziny, nie jest precyzyjne tam mówić. Iloczyn kropkowy podaje swoją nazwę z zapisu. Przy danych dwóch n-wymiarowych wektorów **s** i **t**. iloczyn krokowy jest definiowany tak:

$$\mathbf{s} \bullet \mathbf{t} = \sum_{i=1}^{n} s_i t_i$$

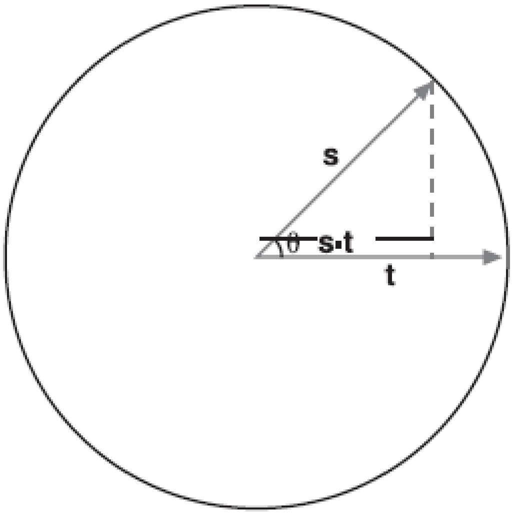
Zauważ ,że nie jest to to samo co kropka, jakiej używamy w programowaniu. W programowaniu, kropka jest kropką końcową ; w tym przypadku kropka jest wypośrodkowana między znakami . Mnożenie zmiennych jest niejawne, co oznacza ,że gdy zmienne są połączone jak w poprzednim równaniu, sugerowane jest mnożenie. Może się jednak zdarzyć ,że będziesz musiał użyć zmiennych zawierających więcej niż jeden znak, co spowoduje zamieszanie związane z nazwami zmiennych. Dlatego wygodnie jest oddzielić je kropką, dlatego czasami widzisz równanie zapisane tak ,że kropka oddziela dwie zmienne rzeczywiste które muszą być pomnożone. Czasami jest to również stosowane do funkcji lub mnożenie między innymi typami elementów. W tych przypadkach, iloczyn kropkowany jest w rzeczywistości symbolem domniemanym, ponieważ jeśli spojrzymy na funkcję dla n = 1, zauważymy ,że ta operacja definiuje proste mnożenie. Sam iloczyn kropkowy nie jest interesujący. Sprawia że interesujące jest równanie, które spełnia iloczyn skalarny. Warto zauważyć ,że dla dwóch wektorów **s** i **t** i theta, kąt między dwoma wektorami , otrzymasz co następuje:

$$\mathbf{s} \bullet \mathbf{t} = \|\mathbf{s}\|\|\mathbf{t}\|\cos(\theta)$$

Możemy łatwo udowodnić przez użycie prawa cosinusów w trójkącie o bokach **s**, **t** i (**s – t**). Jeśli na przykład wybierzesz s = <1.-2,3> i t =<-,-1,2>, otrzymasz wynik :

$$\begin{aligned}
\mathbf{s} \bullet \mathbf{t} &= 1 \cdot 0 + (-2)(-1) + 3 \cdot 2 = 8 \\
\mathbf{s} \bullet \mathbf{t} &= \|\mathbf{s}\|\|\mathbf{t}\|\cos(\theta) \\
8 &= \sqrt{14} \cdot \sqrt{5}\cos(\theta) \\
\cos(\theta) &= \frac{8}{\sqrt{70}} \\
\theta &= 0.2971 = 17^\circ
\end{aligned}$$

Interpretacja geometryczna przechodzi z równania. Weź poprzednie równanie i podziel każdą ze stron przez iloczyn norm. Otrzymujesz iloczyn skalarny dwóch wektorów normalnych równy kosinusowi kąta między nimi



Wynikiem normalnego iloczynu skalarnego jest rzut – w tym przypadku, linia urojona, która przechodzi od końca **s** do **t** przez osiągnięcie t ,tak, że linia urojona i **t** są prostopadłe (to znaczy, oddzielone kątem 90 stopni). Nie ma prawdziwego powodu dla normalizacji **s** , tak długo jak znormalizowane jest **t** , rzut wciąż działa doskonale. Dlatego też, jeśli spojrzysz na iloczyn skalarny gdzie tylko **t** jest normalne, otrzymujesz rzut s na wektor jednostkowy t. Łatwo zauważyć na powyższym rysunku ,że jeśli rozszerzysz **s** tak ,że wykroczy poza okrąg jednostkowy , możesz nadal stosować odpowiednią projekcję **s** na **t.** Nadal jest to zgodne z definicją cosinusu, co pokazują poniższe równania:

$$\cos(\theta) = \frac{\text{Proj}}{\|\mathbf{s}\|}$$

$$\text{Proj} = \|\mathbf{s}\| \cos(\theta)$$

Niestety nie działa to jeśli norma **t** nie jest 1

Można wywnioskować jeszcze kilka rzeczy z iloczynu skalarnego, biorąc pod uwagę jego geometryczną interpretację i równanie:

- Jeśli dwa wektory są prostopadłe, geometrycznie, można zobaczyć ,że wynik iloczynu skalarnego powinien wynosić 0 ponieważ rzut pierwszego wektora na drugi wektor to 0
- Iloczyn skalarny jest faktycznie dobrym testem dla określenia czy dwa wektory są ortogonalne. (Ortogonalny jest innym sposobem powiedzenia prostopadły, bez geometrycznych podtekstów). Jak zwykle nie ograniczamy się do zwykłego świata 3D. Ta definicja jest poprawna dla n-wektora, więc można określić ortogonalność dla świata 4D, jeśli można zwizualizować taką rzecz.
- Możesz szybko określić czy dwa wektory są oddzielone przez mniej niż 90 stopni, po prostu patrząc na znak iloczynu skalarnego. Kiedy znak jest dodatni, oznacza to ,że dwa wektory są oddzielone mniej niż 90 stopniami

Jeszcze jedna uwaga: ta funkcja daje pewną formę „długości" dla pary wektorów. Brzmi to okropnie jak norma, z wyjątkiem tego ,że funkcja ta pozwala na ujemne długości i dwa wektory. Aby to naprawić można wziąć iloczyn skalarny wektora na sam wektor i zawsze da on wartość większą niż 0 dla wektora niezerowego. Co ciekawe, jeśli to zrobisz, szybko zorientujesz się ,że pierwiastek kwadratowy iloczynu skalarnego jest w rzeczywistości 2-normą,jak poniżej:

$$\sqrt{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^{\,2}} = \|\mathbf{v}\|_2$$

Rzutowanie wektora na wektor

Widziałeś już ,że iloczyn skalarny z **s** i **t**, przy normalnym **t** ma interpretację geometryczną będącą skalarnym rzutem **s** na **t** . Szczególnie interesującym punktem byłoby rzutowanie arbitralnego wektora na inny arbitralny wektor jako przeciwieństwo prostego umieszczania razem długości skalarnych. Cienie są dobrym przykładem geometrii rzutowej. Możesz łatwo wydedukować równanie dla ogólnego rzutowania skalarnego przez prostą normalizację wektora **t** :

$$\left|\mathrm{Proj}(\mathbf{s})\right| = \frac{\mathbf{s} \bullet \mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|_2}$$

Ponieważ rzutujemy wektor na inny wektor, powinieneś logicznie odzyskać wektor. Jeśli znów spojrzysz na rysunek powyżej, zauważysz ,że przewidywana długość jest w rzeczywistości wzdłuż wektora **t.** Ma to sens, ponieważ jeśli rzutujesz **s** na **t,** wtedy twój wektor powinien być wielokrotnością **t** . Aby obliczyć rzutowanie wektorowe jednego wektora na inny, po prostu musimy zmienić długość **t** od dowolnej długości rzutu określonego w poprzednim równaniu.. Najprościej mówią, zaczniemy od normalizacji wektora, nadając mu długość 1, po której następuje mnożenie pożądanej długości rzutu, którą obliczyłeś powyżej. Daje to końcowe równanie dla rzutowania **s** na t :

$$\begin{aligned}\mathrm{Proj}_{\mathbf{t}}(\mathbf{s}) &= \frac{\mathbf{s} \bullet \mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|_2^2}\mathbf{t} \\ &= \frac{\mathbf{s} \bullet \mathbf{t}}{\mathbf{t} \bullet \mathbf{t}}\mathbf{t}\end{aligned}$$

Jako przykład, weźmy te same wartości wybrane powyżej dla **s** i **t .** Rzutowanie s na t jest obliczane tak:

$$\begin{aligned}\mathrm{Proj}_{\mathbf{t}}(\mathbf{s}) &= \frac{\mathbf{s} \bullet \mathbf{t}}{\mathbf{t} \bullet \mathbf{t}}\mathbf{t} \\ &= \frac{8}{5}\mathbf{t} \\ &= \left\langle 0, -\frac{8}{5}, \frac{16}{5} \right\rangle\end{aligned}$$

Mnożenie krzyżowe

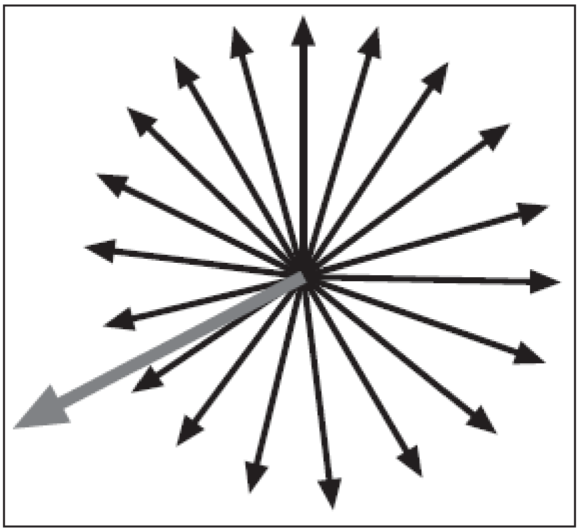
Mnożenie krzyżowe, czasami nazywany iloczynem wektorowym, jest kolejną, bardzo ważną funkcją do opanowania . Jest on zdefiniowany tylko dla wektorów 3D, ale może być użyty również w 2D z wektorami 3D, ustawiając po prostu ostatni składnik wektora 3D na 0. Mnożenie krzyżowe jest reprezentowane przez krzyż. Jego równanie działające na dwóch wektorach **s** i **t,** jest następujące:

$$\mathbf{s}\times\mathbf{t}=\left\langle \mathbf{s}_y\mathbf{t}_z-\mathbf{s}_z\mathbf{t}_y,\mathbf{s}_z\mathbf{t}_x-\mathbf{s}_x\mathbf{t}_z,\mathbf{s}_x\mathbf{t}_y-\mathbf{s}_y\mathbf{t}_z\right\rangle$$

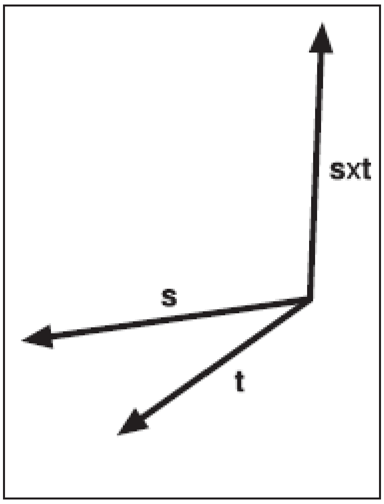
Jest to w rzeczywistości jeden z najbardziej kłopotliwych sposobów zapamiętania równania. Jedną z bardziej interesujących właściwości mnożenia krzyżowego jest to ,że jego iloczyn skalarny z którymkolwiek z jego oryginalnych wektorów daje 0. Równanie:

$$(\mathbf{s}\times\mathbf{t})\bullet\mathbf{s}=(\mathbf{s}\times\mathbf{t})\bullet\mathbf{t}=0$$

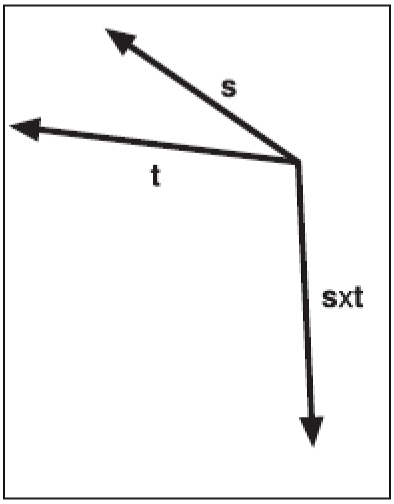
Jeśli pamiętasz co oznacza, że iloczyn skalarny dwóch wektorów jest równy 0, prawdopodobnie pamiętasz również ,że oznacza to ,że dwa wektory są w rzeczywistości prostopadłe do siebie. Zatem mnożenie krzyżowe **s** i **t** może być geometrycznie postrzegany jako funkcja , która generuje wektor ortogonalny zarówno dla **s** jaki i **t.** Innym sposobem uzyskania zerowego wyniku jest to że jeden z dwu wektorów wynosi 0. Co oznacza ,że iloczyn wektorowy **s** i **t** wynosi 0? Rozwiązaniem trywialnym jest sytuacja, w której **s** i **t** są zerowe, ale nie jest to naprawdę interesujące. Alternatywnie, jeśli **s** i **t** są liniowo zależne (czyli równoległe), wynik iloczynu wektorowego będzie wynosił zero. Nie powinno to dziwić, ponieważ jeśli myślisz o implikacjach geometrycznych, biorąc pod uwagę dwa równoległe wektory, możesz wygenerować nieskończoną liczbę wektorów prostopadłych, jak pokazano tu



Do tej pory każda operacja jaką widziałeś, mogła być obsługiwana przy użyciu tych samych podstawowych praw, jakich używasz przy liczbach rzeczywistych. Jest to jednak miejsce, w którym wszystko się kończy. W szczególności mnożenie krzyżowe nie jest przemienne. To oznacza ,że **s ● t** to nie to samo co **t ● s.** (Możesz to łatwo zweryfikować, rozwijając równanie po każdej stronie). Zatem, mnożenie krzyżowe może dać dwa prostopadłe wektory. Jeśli myślisz o geometrycznych implikacjach tego, ma to sens ponieważ możesz wybrać wektor i odwrócić jego kierunek, aby uzyskać nowy wektor, który jest również prostopadły do dwóch pozostałych i równoległy do poprzedniego. Jednak jest nieco problematyczne, ponieważ nie wiesz w którym kierunku pójdzie wektor, kiedy go wyliczysz. Bardzo prostym sposobem określanie nowego kierunku jest użycie reguły prawej dłoni. Najpierw otwórz prawą rękę i ustaw kciuk pod kątem 90 stopni wobec pozostałych palców. Następnie skieruj palce na pierwszy wektor mnożenia krzyżowego. Następnie, jeśli to możliwe, zwiń palce tak, aby wskazywały kierunek drugiego wektora. Jeśli możesz zwinąć palce w ten sposób, wynikowy wektor będzie dyktowany pozycją kciuka. Jeśli nie możesz zawinąć palców, ponieważ wymagałoby to odgięcia ich do tyłu, obróć rękę tak ,a by kciuk był skierowany ku dołowi. Zasada prawej dłoni jest wizualną techniką określania kierunku powstającego wektora, ale istnieje również geometryczny sposób patrzenia na problem. Jeśli przejście od **s** do **t** wymaga poruszania się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, wtedy wektor skierowany jest w górę. Jeśli ruch jest zgodny z ruchem wskazówek zegara, widzimy wektor skierowany w dół. Trygonometria oferuje jeszcze jeden pogląd na ten problem. Jeśli kąt między **s** a **t** jest mniejszy niż π, wektor będzie wskazywał górę, jeśli nie , będzie wskazywał dół. Kiedy kąt jest wyliczany, powinieneś patrzeć na zakres kątów który wzrasta w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Nie wystarczy wziąć mniejszy z dwóch kątów między wektorami.



s • t : wynikowy wektor w górę

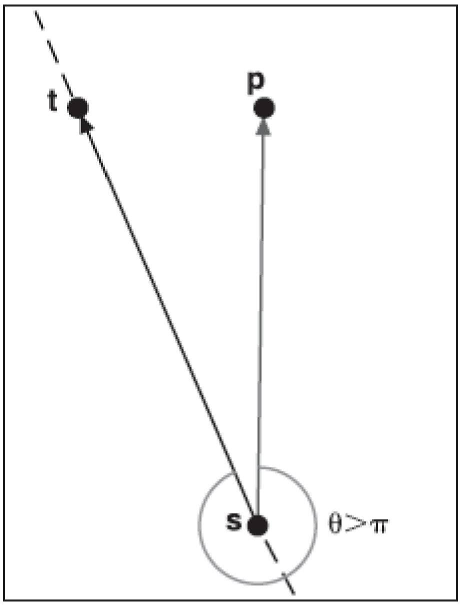


s • t : wektor wynikowy w dół

Przyjmujemy nasze tradycyjne wartości s = <1,-2,3) i t = <0,-1,2>, możemy obliczyć ich iloczyn skalarny jak poniżej:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}\bullet\mathbf{t} &= \langle(-2)\cdot 2-3(-1), 3\cdot 0-1\cdot 2, 1(-1)-(-2)0\rangle\\ &= \langle -4+3, 0-2, -1+0\rangle\\ &= \langle -1,-2,-1\rangle\end{aligned}$$

W świecie 2D możemy użyć mnożenia krzyżowego dla określenia „boku” wierzchołka danego wektora. Innymi słowy, jeśli masz wektor, możesz określić czy dany punkt znajduje się po prawej czy po lewej stronie wektora .Aby to obliczyć po prostu rozważ iloczyn wektorowy wektora brzegowego (nazwijmy go **st**) i rozważ wektor od punktu **s** to punktu **p sp.** Wiesz ,że kierunek mnożenia krzyżowego może ci powiedzieć czy wektory są oddzielone przez mniej niż π. W tym momencie, dedukcja powinny być dość proste; obliczamy iloczyn wektorowy st z sp, i jeśli komponent z jest dodatni, wiesz ,że kąt przeciwny do ruchu wskazówek zegara między dwoma wektorami jest mniejszy niż π a zatem sp jest po lewej stronie wektora st. I odwrotnie jeśli znak jest ujemny, implikuje to ,że kąt jest większy niż π, a zatem sp jest po prawej stronie st



Nie powinno się obejść bez przykładu, więc weźmy s - <0,0>, t = <-1,1> i p <0,1>, tak jak na powyższym rysunku. Przez obliczenie mnożenia krzyżowego, otrzymasz dokładnie to czego możesz oczekiwać z geometrycznego punktu widzenia

$$\begin{aligned}\mathbf{st} &= \langle -1,1\rangle\\ \mathbf{sp} &= \langle 0,1\rangle\\ \mathbf{st}\bullet\mathbf{sp} &= \langle -1,1,0\rangle\bullet\langle 0,1,0\rangle\\ &= \langle 0,0,-1\rangle\end{aligned}$$

Składowa mnożenia krzyżowego jest nazywana również wyznacznikiem, i może być uogólniony na większe wymiary.

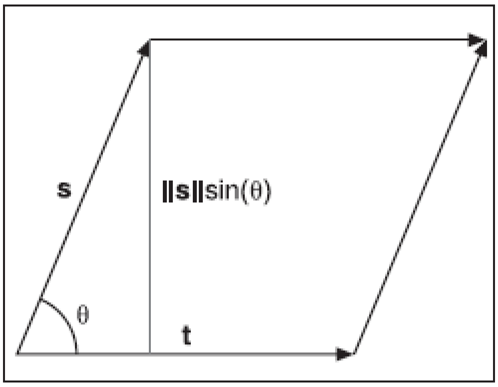
Przestudiowałeś już nieco kierunek mnożenia krzyżowego , ale pamiętaj ,że wektory są elementami określanymi zarówno przez kierunek jak i wielkość. Do tej pory nie mówiliśmy o zbyt wiele o wielkości, ale istnieje dość łatwa do jej określenia formuła :

$$\|\mathbf{s}\times\mathbf{t}\| = \|\mathbf{s}\|\|\mathbf{t}\|\sin(\theta)$$

Ta formułą nie powinna dziwić, ponieważ jest bardzo podobna do tej dla iloczynu skalarnego. Zauważyłeś ,że kierunek wektora generowanego przez formułę był wrażliwy na katy większe niż π, a ta formuła wyraźnie stwierdza ten fakt przez odwrócenie znaku dla takich kątów. Daje to również interesujący fakt. Jeśli weźmiemy iloczyn wektorowy z **s** i **t** , dostaniemy dany wektor. Jeśli odwrócimy kolejność **s** i **t,** zasadniczo zmieniamy kąt θ na (2π – θ); podłączenie tej wartości do równania sprawi ,że zdasz sobie sprawę, że wszystko co robi to odwraca znak wektora. Innymi słowy :

$$\|\mathbf{s}\times\mathbf{t}\| = -\|\mathbf{t}\times\mathbf{s}\|$$

Istnieje również wyjaśnienie geometryczne długości iloczynu wektorowego. Najpierw, umieść dwa wektory w taki sposób ,aby ich punkty zaczepienia zgadzały się i obracaj je tak, aby jeden wektor był poziomy. Potem dodajemy **s** do punktu końcowego **t** a **t** przy punkcie końcowym **s** generuje równoległobok. Na koniec obcinamy małe trójkąty z boków i wklej je na drugim końcu; zauważysz ,że w zasadzie zbudowałeś kwadrat. Prawdopodobnie już wiesz jak obliczyć pole kwadratu (wysokość razy szerokość). Mamy już szerokość (podaną przez normę **t**); możesz wyliczyć wysokość, ponieważ używając sinusoidy, wiesz ,że jest to sin(θ) razy norma z **s** . Podsumowując , długość iloczynu wektorowego jest w rzeczywistości obszarem równoległoboku generowanego przez wektory **s** i **t**



Przestrzeń Wektorowa

Pojęcie przestrzeni wektorowej jest dość interesujące, ponieważ łączy wektory z układami współrzędnych. Przestrzeń wektorowa jest zdefiniowana jako zbiór wektorów **s,t,u** , które mają następujące właściwość pod względem wielkości skalarnych a,b:

a) $\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{t}+\mathbf{s}$

b) $(\mathbf{s}+\mathbf{t})+\mathbf{v}=\mathbf{s}+(\mathbf{t}+\mathbf{v})$

c) $\mathbf{0}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v}$

d) $\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v}$

e) $a(b\mathbf{v})=(ab)\mathbf{v}$

f) $(a+b)\mathbf{v}=a\mathbf{v}+b\mathbf{v}$

g) $a(\mathbf{s}+\mathbf{t})$

h) $1\mathbf{v}=\mathbf{v}$

Ten zestaw właściwości może brzmieć całkiem niedorzecznie, ale wierzcie lub nie, istnieje wiele innych przestrzeni, które nie przestrzegają pewnych tych zasad. Do tej pory używaliśmy niejawnie przestrzeni wektorowej {<1,0,0>, <0,1,0>, <0,0,1>}

Dzień Niepodległości

Jeśli spodziewałeś się przeczytać coś o filmie Dzień Niepodległości, nic z tego. W tej części omówimy liniową zależność między wektorami. Podczas pracy z przestrzeniami wektorowymi nie ma sensu zajmowania się tymi samymi informacjami. Posiadanie dwóch równych wektorów nie dostarcza zbyt wielu informacji. Jeśli pracujesz z wektorami , upewnij się ,że nie masz tych samych informacji dwukrotnie. Poprzednio zauważyliśmy ,ze dwa wektory są liniowo niezależne, jeśli nie są równoległe. Jednym ze sposobów na stwierdzenie czegoś przeciwnego jest powiedzenie , że dwa wektory są liniowo zależne, jeśli jeden wektor jest wielokrotnością drugiego. Wynika to z faktu ,że dwa równoległe wektory muszą współdzielić ten sam kierunek i dlatego tylko wielkość może się między nimi zmieniać. Można również uogólnić to mówiąc ,że zbiór wektorów jest liniowo zależny, jeśli istnieje jedne wektor, który można wyrazić jako liniową kombinację pozostałych. Dziwny termin to „kombinacja liniowa". Wiemy ,że dla dwóch wektorów zależnych liniowo, jeden musi być skalarną wielokrotnością drugiego. W sensie ogólnym, kombinacja liniowa jest niczym więcej niż sumą wektorów indywidualnie pomnożonych przez wartość skalarną. Jeśli o tym pomyśleć, używałeś kombinacji linowych kiedy uczyłeś się o dodawaniu wektorów. Dodawanie jest w rzeczywistości kombinacją liniową. Sztuczka polega na ty ,że zawsze mnożymy przez stałą wartość skalarną 1. Definicja ta jednak nie jest restrykcyjna. W ujęciu równania, liniowo zależny zbiór wektorów v_i przylega do następujące warunku dla jednego wektora v_k i z co najmniej jednym współczynnikiem niezerowym a_i :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_k, i \neq k$$

Ten fakt jest ważny ponieważ , jak wspomniano wcześniej, jeśli wektor jest liniowo zależny od innych w tym samym zbiorze, nie przynosi to żadnych nowych informacji do tabeli, i nie trzeba tego nanosić. Na przykład, weźmy zbiór wektorów {<1,2,3> , <4,7,10>, <1,1,1>} .Możesz uzyskać środkowy wektor , mnożąc pierwszy przez 3 i dodanie ostatniego do niego. Oznacza to ,że zbiór wektorów jest liniowo zależny. Zbiór wektorów , który może być wygenerowany przez liniową kombinację zbioru wektorów jest nazywany rozpiętością/ Na przykład , można powiedzieć ,że w 3D , rozpiętość {<1,0,0>, <0,1,0>, <0 ,0 ,1>} jest zbiorem wszystkich wektorów w przestrzeni 3D. To powinno być oczywiste; jeśli pop prostu pomnożysz pierwszy wektor przez x, drugi przez y a trzeci przez z. możesz wygenerować dowolną współrzędną <x,y,z>. Kiedy mówimy o rozpiętości, redundacja staje się bezużyteczna; możesz odrzucić każdy wektor będący liniową kombinacją pozostałych. Innymi słowy, rozpiętość pierwszego przykładu zbioru wektorów nie różni się od tego , jeśli pominąłeś ostatni wektor zbioru. Faktycznie, możesz pominąć jeden z trzech wektorów, ponieważ wszelkie wektory z tym zbiorze mogą być wyrażone jako kombinacja liniowa dwóch pozostałych

Podstawa

Podstawę można łatwo zdefiniować jako minimalny zbiór wektorów ,które mogą obejmować całą przestrzeń . Ostatni przykład jaki widziałeś, jest podstawą. Bardziej wyrafinowanym przykładem podstawy byłoby {<1,2,0>, <0,1,2>, <1,0,2>}. Możesz zweryfikować to czy coś rzeczywiście formuje podstawę przez próbę znalezienia niezerowych wartości skalarnych a,b i c , takich ,że liniowa kombinacja tych wektorów jest wektorem 0. Znalezienie takiej możliwości oznacza ,że można zapisać co najmniej jeden wektor może być zapisany jako liniowa kombinacja pozostałych. Zauważ ,że jest to dokładnie to samo ,co równanie liniowej niezależności podane wcześniej, którym każdy wyraz został zgrupowany po tej samej stronie równania. Równanie to:

$$\mathbf{0} = a\langle 1,2,0\rangle + b\langle 0,1,2\rangle + c\langle 1,0,2\rangle$$
$$\langle 0,0,0\rangle = \langle a+c, 2a+b, 2b+2c\rangle$$

$$0 = a + c$$
$$0 = 2a + b$$
$$0 = b + 2c$$

$$a = -c$$
$$b = -2c = 2a$$

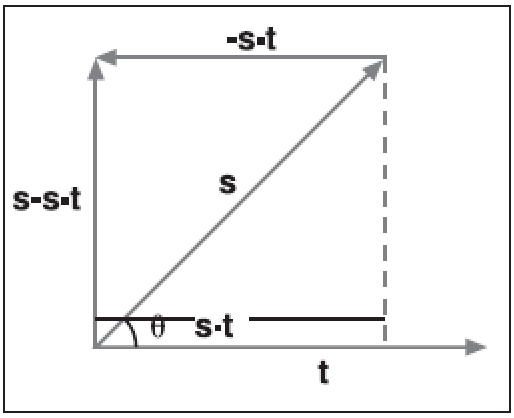
$$0 = 2a + b = 2a + 2a = 4a$$

$$a = b = c = 0$$

Możesz żonglować równaniami, tak jak chcesz, ale nigdy nie znajdziesz nietrywialnego rozwiązania tego problemu. Wszystko sprowadza się do trywialnego rozwiązania; dlatego zbiór jest liniowo niezależny. Więc wiesz, że wektory są niezależne, ale aktualnie nie wiesz czy są wystarczające i dość minimalne aby opisać całą przestrzeń. Okazuje się ,że tak. Twierdzenie stanowi ,że w n-przestrzeni podstawa będzie miała n wektorów. Jednym ze sposobów jest to ,że każdy liniowo niezależny wektor może sterować jedną osią w układzie współrzędnych. Na przykład, trywialna podstawa {<1,0,0>, <0,1,0>,<0,0,1>} steruje trzema oddzielnymi osiami: x,y i z , odpowiednio. Ale co jeśli wektory nie są trywialne? Aby to zwizualizować, można o tym myśleć jako obróconym zestawie osi w przestrzeni, gdzie każda oś jest określona przez wektor. Jeśli masz mniej niż n wektorów, co najmniej jedna oś nie będzie określna ,a zatem nie będzie można adresować każdego wektora w przestrzeni. Jeśli masz więcej niż n wektorów, przynajmniej jeden wektor będzie liniową kombinacją innych i dlatego nie będzie dostarczał nowych informacji. Z oczywistych względów znacznie łatwiej jest radzić sobie z wektorami, które mają wpływ na trywialne osie, niż gdy mamy do czynienia z wektorami, które wpływają na więcej niż jeden komponent naraz dla jednej wartości skalarnej. Na przykład, spróbuj znaleźć wartości skalarne {x,y,z} dla współrzędnych <1,2,3> w dwóch podanych dotychczas bazach, a szybko zorientujesz się ,że {<1,0,0>, <0,1,0>, <0,0,1>} jest dużo przyjemniejszym zestawem do pracy/ Dzieje się tak dlatego ,że pierwszy wektor może być pomnożony przez 1, drugi przez 2, a trzeci przez 3. Z pewnością będzie to trudniejsze z inną podstawą (która , jak sobie przypominamy, wciąż rozciąga się na każdą współrzędną w przestrzeni). Jedną rzeczą która sprawia, że ten zbiór jest tak przyjemny w pracy jest to ,że jest ortogonalny. To znaczy, każdy wektor wzięty dwa razy po dwa ,jest ortogonalny . Ta właściwość umożliwia kontrolowanie poszczególnych osi oddzielnie, Taka podstawa jest nazywana podstawą ortogonalną. Inną bardzo miłą właściwością jest to ,że wektory , wszystkie mają normę 1. To sprawia ,że znalezienie wartości skalarnej niż gdyby wartości bardziej niejasne. Podstawa, której wszystkie wektory mają normę 1 ,nazywamy podstawą normalną ; podstawa której wektory są ortogonalne i której wektory mają normę 1 jest nazywana podstawą ortonormalną. Nie daj się zwieść poprzednią definicją. Istnieje nieskończony zbiór wektorów, które tworzą podstawę ortogonalną w 3D. Po prostu weź podstawę ortonormalną jaką znasz i pozwól jej swobodnie obracać się wokół dowolnej osi, a nadal będziesz miał podstawę ortonormalną. Powodem, dla którego możesz chcieć zbudować inną podstawę ortonormalną, jest uproszczenie sobie życia, przez zbudowanie sobie innego układu współrzędnych.

Ortogonalizacja

Słowo „orotgonalizacja” dość dokładnie określa to co robi. Ortogonalizacja jest procesem budowania podstawy ortogonalnej ze zbioru linearnie niezależnych wektorów. Jest to przydatne nie tylko w przypadku układów współrzędnych ale również z powodów numerycznych. Format zmiennoprzecinkowy IEEE, który jest wspierany przez wszystkie dzisiejsze komputery, ma wiele problemów numerycznych. Na przykład, jeśli obrócisz trzy ortonormalne wektory swobodnie w przestrzeni 3D, ostateczna precyzja jest na tyle zła ,ze wektory nie będą już ortonormalne. Może to stanowić problem, jeśli używasz tych wektorów do przekształcania kształtów na ekranie, ponieważ zaczniesz zauważać dziwne odkształcenia. Oczywiście, wymagany jest proces aby ponownie ortogonalizować te wektory. Teraz , gdy rozumiesz dlaczego, spójrzmy na to – jak. Poprzednio pokazano ,że rzut wektora **s** na inny wektor **t** , daje nowy wektor który jest równoległy do **t** ,ale z rzutowaną wielkością **s.** Możesz również spojrzeć na prostopadły komponent **s** zamiast patrzeć na jego komponent w odniesieniu do **t**. Aby to wyliczyć, wystarczy odjąć rzutowany komponent od **s**. Jest to równoznaczne z powiedzeniem ,ze masz współrzędne <x,y> i ,że odejmiesz od niego <0,y> . To co pozostaje to komponent x ,jak poniżej



Matematycznie, prostopadłym elementem wektora jest

$$\mathrm{Perp}_s(\mathbf{t}) = \mathbf{s} - \frac{\mathbf{s} \bullet \mathbf{t}}{\mathbf{t} \bullet \mathbf{t}}\mathbf{t}$$

Działa to poprawnie dla dwóch wektorów. Biorąc pod uwagę dwa wektory, możemy znaleźć wektor, który jest ortogonalny do innego wektora. Jeśli myślisz o spojrzeniu geometrycznym, możesz całkiem łatwo wydedukować ,ze ten proces może być zastosowany do więcej niż jednego wektora. Na przykład, jeśli mamy trzy wektory, wybieramy jeden wektor jako wektor do rzutowania na inny wektor, jako wektor rzutowany. Obliczyliśmy wektor prostopadły dla rzutowanego wektora,, a teraz powinniśmy mieć dwa ortogonalne wektory. W przypadku trzeciego wektora, może odjąć jego rzut od pierwszego wektora i jego rzut od drugiego wektora, i, z tych samych powodów, uzyskamy wektor, który jest orotgonalny zarówno dla pierwszego i drugiego wektora. Podsumowując równania, otrzymujemy :

$$\mathbf{v}_i\,' = \mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mathbf{v}_i \bullet \mathbf{v}_j}{\mathbf{v}_j \bullet \mathbf{v}_j}\mathbf{v}_j$$

po prostu zastosujemy ten proces do n-1 wektorów i z powodzeniem uzyskamy podstawę ortogonalną. Możesz łatwo obliczyć podstawę ortogonalną, jeśli po prostu znormalizujesz wektor wynikowy. Zilustrujmy to przykładem. Weźmy poprzednią bazę {<1, 2, 0>, <0, 1, 2>, <1, 0, 2>} i wygenerujemy z niego bazę ortogonalną:

$$v_1\,' = \langle 1,2,0 \rangle$$

$$\begin{aligned} v_2\,' &= \langle 0,1,2 \rangle - \frac{\langle 0,1,2 \rangle \bullet \langle 1,2,0 \rangle}{\langle 1,2,0 \rangle \bullet \langle 1,2,0 \rangle}\langle 1,2,0 \rangle \\ &= \langle 0,1,2 \rangle - \frac{2}{5}\langle 1,2,0 \rangle \\ &= \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 2 \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2\,' &= \langle 1,0,2 \rangle - \frac{\langle 1,0,2 \rangle \bullet \langle 1,2,0 \rangle}{\langle 1,2,0 \rangle \bullet \langle 1,2,0 \rangle}\langle 1,2,0 \rangle - \frac{\langle 1,2,0 \rangle \bullet \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 2 \right\rangle}{\left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 2 \right\rangle \bullet \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 2 \right\rangle}\left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 2 \right\rangle \\ &= \langle 1,0,2 \rangle - \frac{1}{5}\langle 1,2,0 \rangle - \frac{18}{21}\left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 2 \right\rangle \\ &= \langle 1.1429, -0.5714, 0.2857 \rangle \end{aligned}$$

Możesz sprawdzić ,że te wektory są rzeczywiście ortogonalne, obliczając iloczyn skalarny na każdej możliwej pary wektorów. W związku z tym tworzą one podstawę ortogonalną w 3D. W 3D jeśli wiesz , że dwa z tych wektorów są ortogonalne, istnieje znacznie łatwiejszy sposób obliczania trzeciego wektora. Przypomnijmy, że mnożenie krzyżowe jest w rzeczywistości wektorem, który jest ortogonalny dla obu pierwotnych wektorów. Dlatego też, nie powinieneś marnować czasu na obliczanie ortogonalnego wektora Gram-Schmidta jak pokazano w poprzednim przykładzie, a zamiast tego po prostu uciec się do użycia mnożenia krzyżowego, który jest znacznie prostszy do obliczenia. W przypadku drugiego wektora metoda przedstawiona w poprzednim równaniu jest prawie tak prosta, jak tylko można. Ważne jest ,aby pamiętać o innych rzeczach (takich jak mnożenie krzyżowe), które są bardziej szczegółowe niż przypadki ogólne, ale również bardziej wydajne.