III. Poznaj Macierze

Czasami ogólność pojęcia jest zasłonięta przez przykłady użyte do wyjaśnienia. W drugiej części widziałeś wektory jako elementy niosące liczby rzeczywiste, ale ile z nich wyrażono w kategorii, powiedzmy wielomianów? Co ciekawe, definicja wektora nie ogranicza w żaden sposób wektorów do liczb rzeczywistych. Nie musisz na nie patrzeć jak koniec wektora i punkt zaczepienia. Większość materiałów dotyczyło elementów rzeczywistych elementów , ale co się stanie jeśli wybierzesz inny typ elementu, który nie jest liczbą rzeczywistą? Na przykład zobaczyłeś w jaki sposób można użyć wektorów do reprezentowania takich rzeczy jak kanał kolorów , po prostu biorąc pod uwagę wektor jako tablicę elementów. Macierze i wektory mają bardzo bliskie relacje. W rzeczywistości, macierz jest w rzeczywistości wektorem u jej podstaw, z kilkoma bardziej interesującymi operacjami dodanymi do niej . W tej części wykroczymy poza podstawowy materiał, badając dość zaawansowane pojęcia, które możesz wykorzystać z perspektywy gry.

Mięso, Matryce

Tytuł nie jest literówka; to kalambur. Macierze są prawdziwym mięsem matematyki, ponieważ można ich używać do reprezentowania pojedynczych liczb, wektorów i innych elementów. Wiesz, że wektory mogą nosić prawie każdy element. Ale co się stanie, jeśli wybrane przez ciebie elementy będą prawdziwymi wektorami? W takim przypadku otrzymujesz matrycę. Mówiąc najprościej , macierz jest wektorem wektorów rzeczywistych. Podsumowując , macierze są bardzo potężnymi obiektami, które podobnie jak wektory, ułatwiają życie w kategoriach reprezentacji i obliczeń. Są niezwykle pomocne w radzeniu sobie w z liniowymi przekształceniami, z którymi masz do czynienia w grach i są jedną z kluczowych struktur danych używanych do wydajnego reprezentowania skumulowanych transformacji. Macierz może zatem reprezentować przekształcenie , które jest stosowane (pomnożony) za pomocą wektora. Istnieje wiele sposobów zapisania macierzy na papierze. Jedną z takich metod jest użycie jej samej definicji i zapisanie macierzy jako << … > , < … >, < … >>. Chociaż jest to poprawny sposób zapis macierzy (i to jak niektóre aplikacje matematyczne poproszą o wprowadzenie macierzy), nie jest to bardzo dobry sposób na zobaczenie macierzy. Ładniejszym sposobem zapisania macierzy jest poprawne wyrównanie wszystkiego w tabeli n x n. Załóżmy na przykład ,że chcesz mieć macierz, która miałaby 3 wektory na 4 wektory – co z definicji, daje macierz 3 x 4. Taka macierz może być zapisana tak:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Chociaż jest to najpowszechniejszy sposób spojrzenie na macierze, nie jest to zawsze najłatwiejsze. Alternatywnie, jeśli uważasz ,że prawdziwe wektory są elementami atomowymi, możesz pozwolić aby r_i odnosiło się do wiersza i , to wtedy zapiszemy macierz w tej formie:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$$

Po rozwinięciu jest to w rzeczywistości 3 x 4. Jeśli jednak uważasz , że wiersze są elementami, możesz powiedzieć ,że jest to macierz 3 x 1 , ponieważ w rzeczywistości masz tylko jeden element, który jest wektorem. Macierz n x 1 jest nazywana macierzą kolumnową ze względu na kształt kolumny. Istnieje jeszcze inny sposób spojrzenia na tę macierz: przez spojrzenie na nią jako mającą elementy w postaci kolumny. Więc jeśli weźmiesz kolumny z macierzy M u wygenerujesz wektor dla każdej z czterech kolumn, otrzymasz kolejną prawidłową reprezentację macierzy:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_4 \end{bmatrix}$$

To zaczyna wyglądać bardzo podobnie do wektora, ale nie dajcie się oszukać. Wektory zapisujemy ze spiczastymi nawisami, podczas gdy macierze używają kwadratowych nawiasów. Ta forma macierzy 1 x n jest nazywana macierzą jednowierszową, z oczywistych powodów. Podczas pracy z macierzami, czasami wato spojrzeć na nie w bardziej abstrakcyjnym sensie, tak jak zbiór wierszy i kolumn. Z tego powody, te różne reprezentacje oferuje bardzo dobre narzędzia do pracy macierzami.

Podstawowe Operacje I Właściwości

Wektor w rzeczywistej przestrzeni jest zdefiniowane jako zbiór rzeczywistych wartości. W miarę przechodzenia do macierzy stosuje się tą samą koncepcję, ale wektory liczb rzeczywistych zamiast tylko samych liczb rzeczywistych. Przy macierzach , pracujemy z nowym elementem (wektor rzeczywisty), więc zasady korzystania z nich będą róże- coś podobnego. Nie ma się co bać. Istnieje wiele operacji ,które można wykonać a pomocą wektorów elementów rzeczywistych. Użyteczność macierzy ma po prostu została pomnożona. Aby dać ci przedsmak tego co ma nadejść, możesz wziąć zbiór równań liniowych i przekształcić je w formę macierzową:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 6x - y &= 3 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

Oczywiście, aby rozwiązać rzeczywisty problem, będziesz musiał poczekać aż zrozumiesz podstawy dotyczących macierzy i praw które regulują ich użycie.

Dodawanie Macierzy

Podobnie jak w przypadku wektorów, operacja dodawania dla macierzy jest dobrze zdefiniowana. Wszystko co musisz zrobić, to dodać poszczególne elementy macierzy co z kolei implikuje dodanie dwóch rzeczywistych wektorów. Jeśli chodzi o równania, operacja dodawania jest taka, jakiej można oczekiwać w przypadku dwóch macierzy A i B :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

Z oczywistych względów macierze mogą być dodawane tylko wtedy , gdy mają ten sam wymiar. Nie inaczej było w przypadku wektorów, które również muszą być tego samego wymiaru i typu, aby mogły być ze sobą połączone. Podobnie, odejmowanie macierzy może być wykonane dokładnie tak, jak być tego oczekiwał:

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & \dots & a_{1m}-b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-b_{n1} & \cdots & a_{nm}-b_{nm} \end{bmatrix}$$

Podsumowując, operacje dodawania i odejmowania dla macierzy są związane tymi samymi zasadami jak dla wektorów. Wystarczy dodać zbiór dwóch wektorów. Jako przykład weźmy dwie macierze A i B , i dodajmy je razem

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+4 & 3+9 \\ 4+2 & 5+5 & 6+8 \\ 7+1 & 8+6 & 9+7 \end{bmatrix}$$

Mnożenie Przez Skalar

W przypadku wektorów widziałeś mnożenie skalarne jako środek do skalowania wielkości wektora .Dotyczy to również macierzy , ponieważ mają one normę. Jeśli odwołasz się do głównej definicji macierzy, możesz ponownie wydedukować ,ze mnożenie przez skalar jest wykonywane zgodnie z oczekiwaniami. W przypadku wektorów skalar jest mnożony przez każdy pojedynczy element w wektorze. Przy macierzach, jeśli zastosujemy zasadę rekurencyjną, otrzymamy:

$$k\mathbf{M} = \begin{bmatrix} k\mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ k\mathbf{r}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{nm} \end{bmatrix}$$

Jeśli zrozumiesz , jak powstała macierz, bardzo łatwo zauważysz, że mnożenie przez skalar macierzy jest kwestią pomnożenie każdego pojedynczego elementu macierzy przez ten sam skalar k, jak pokazano poniżej:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, k = 2$$

$$k\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 5 & 2\cdot 6 \\ 2\cdot 7 & 2\cdot 8 & 2\cdot 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$$

Transpozycja Macierzy

Prawda czy fałsz macierz jest zazwyczaj zapisywana jako tablica n x m – to znaczy, tablica z n wierszami i m kolumnami

Fałsz. Są dwa typy macierzy:

- Macierz z wierszem głównym – tworzysz macierz typu wiersz główny, biorąc pod uwagę jej elementy jako wiersze. Macierze o wierszu głównym są typami macierzy ,które widziałeś do tej pory, i których będziemy używać
- Macierz z kolumną główną - kiedy tworzymy macierz z kolumną główną, należy rozważyć elementy wektora jako kolumny. Na przykład, jeśli zapisałbyś poprzednią macierz 3 x 4 w formacie kolumny głównej:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

Zauważ ,co tak naprawdę się stało: Każdy element usadowiony pod indeksem ij został połączony z elementem pod indeksem ji. W przeciwieństwie do macierzy wiersza głównego, pierwszy indeks w macierzy kolumny głównej odnosi się do kolumny, a drugi odnosi się do wiersza – stąd nazwa „główna kolumna”. Przydatna może być konwersja macierzy z jednego formatu na inny od czasu do czasu z punktu widzenia wydajności. Tak więc jedną z operacji, którą możesz chcieć osiągnąć, jest transpozycja macierzy – to znaczy, konwersja macierzy z jednego trybu na drugi. Definicja transpozycji była już podana, ale w bardziej rygorystyczny sposób transpozycja macierzy M może zostać zapisana w następujący sposób:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & a_{ji} & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{jj} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & a_{ij} & \cdots & \vdots \\ a_{1j} & a_{ji} & a_{jj} & \cdots & a_{nj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{im} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

W skrócie możemy zapisać, że element $a_{ij} = a_{ji}$.

Jak zauważyłeś, w poprzednim równaniau, transpozycja jest zapisana z dyżym T jako indeksen górnym. Nie oznacza to M do potęgi T; zauważ ,że T nie jest zapisane kursywą, co oznacza ,ze nie jest to wartość skalarna. Na przykład możesz wziąć tę samą macierz, którą użyto w poprzednim równaniu, m , i obliczyć jej transpozycję aby uzyskać:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Mnożenie Macierzy

W poprzedniej części poznałeś dwa rodzaje mnożenia : iloczyn skalarny i iloczyn wektorowy. Iloczyn wektorowy jest zbyt specyficzny aby mógł mieć zastosowanie do macierzy. Iloczyn skalarny , z drugiej strony, ma przyszłość z macierzami. Zacznijmy powoli i spójrzmy na iloczyn skalarny (mnożenie) macierzy i wektora (macierzy kolumnowej , jeśli wolisz) Następująca logika zakłada:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} \bullet \mathbf{B}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \bullet \mathbf{B} \\ \mathbf{r}_2 \bullet \mathbf{B} \\ \mathbf{r}_3 \bullet \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_1 & a_{12} \cdot b_2 & a_{13} \cdot b_3 & a_{14} \cdot b_4 \\ a_{21} \cdot b_1 & a_{22} \cdot b_2 & a_{23} \cdot b_3 & a_{24} \cdot b_4 \\ a_{31} \cdot b_1 & a_{32} \cdot b_2 & a_{33} \cdot b_3 & a_{34} \cdot b_4 \end{bmatrix}$$

Pojawia się kilka interesujących faktów. Na początek, rozmiar macierzy wyraźnie nie muszą być równe. Pierwsza macierz to 3 x 4 podczas gdy druga to 4 x 1. Z samej definicji iloczynu skalarnego, jednak , liczba elementów tych dwóch wektorów do których stosowany jest iloczyn skalarny, musi być jednakowa. Tłumaczenie : Liczba kolumn w pierwszej macierzy musi być zgodna z liczbą wierszy w drugiej macierzy, lub mnożenie nie jest zdefiniowane. Zatem mnożenie macierzy można wyrazić jako sumowane mnożenie pierwszego wiersza macierzy przez kolumnę drugiej macierzy. (Oczywiście, iloczyn skalarny nie ogranicza macierzy B do macierzy kolumnowej. Można łatwo uczynić B macierzą z więcej niż jedną kolumną). Włączmy tą koncepcję do działania. Kiedy działasz z dwoma macierzami A i B i chcesz ustalić, czy te dwie wartości mogą być pomnożone, najpierw ustal czy wielkość kolumny pierwszej macierzy odpowiada rozmiarowi drugiej macierzy. Więc jeśli A było macierzą n x i a B macierzą i x m, byłoby właściwie dobrze zdefiniowane mnożenie, ponieważ kolumna pierwszej (i) pasuje do wiersza drugiej (i). Pytanie brzmi : „Jaka jest wielkość macierzy wynikowej?”. Ponieważ iloczyn skalarny kończy się anulowanie wyrazów pośrednich- lub bardziej stosowanie, łącząc je – widać ,że dla macierzy A i B ,macierz wynikowa staje się macierzą o rozmiarze n x m. Generalnie, element iloczynu macierzy może być obliczony za pomocą następującego równania:

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Jest to po prostu inny sposób wyrażania mnożenia dwóch macierzy. To trochę bardziej kłopotliwe do zapamiętania niż iloczyn skalarny wiersza i kolumny, ale działa. Bardzo ważną rzeczą , którą musisz tu zauważyć, jest to ,że AB to nie to samo co BA. Chociaż liczby rzeczywiste są przemienne, macierze nie są. Powinno to być jasne w poprzednim równaniu ; BA nie jest nawet zdefiniowane, biorąc pod uwagę rozmiar macierzy. Chociaż jesteś nieco ograniczony pod względem operacji algebraicznych, nadal możesz znaleźć kilka właściwości pozostałych do mnożenia macierzy.

$$\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

$$(a\mathbf{A})\mathbf{B} = a(\mathbf{AB})$$

Mnożenie macierzy jest często nazywane łączeniem macierzy ponieważ w rzeczywistości, pozwala na połączenie dwóch transformacji lub zastąpienie jednego systemu liniowego na inny. Jako przykład, pomnóż dwie transformacje macierzy A i B

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot1+2\cdot4+2\cdot0+4\cdot1 & 1\cdot0+2\cdot2+2\cdot3+4\cdot2 \\ 5\cdot1+0\cdot4+1\cdot0+0\cdot1 & 5\cdot0+0\cdot2+1\cdot3+0\cdot2 \\ 2\cdot1+3\cdot4+0\cdot0+2\cdot1 & 2\cdot0+3\cdot2+0\cdot3+2\cdot2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 5 & 3 \\ 16 & 10 \end{bmatrix}$$

Macierz Jednostkowa

W świecie liczb rzeczywistych istnieje jedna liczba, którą można pomnożyć przez dowolną liczbę bez faktycznej zmiany tej liczby. Zgadza się, jest to liczba 1. Jeśli pomnożysz 1 przez jakąkolwiek liczbę, zawsze otrzymasz tą samą liczbę z powrotem. Dla macierzy , mamy odpowiednik : macierz jednostkowa **I** (odpowiednik 1 w świecie rzeczywistym), które nie zmienia żadnej arbitralnej macierzy M przy mnożeniu. Wyrażone matematycznie :

IM = M = MI

W tym przypadku, M jest arbitralną macierzą kwadratową, co oznacza ,że jest macierzą o rozmiarze n x n a I jest macierzą jednostkową, a także macierzą kwadratową o tym samym rozmiarze. Aby rozwiązać ten problem, możesz wrócić do przestrzeni wektorowej. W przestrzeniach wektorowych jedna przestrzeń podstawowa byłą taka ,że nie modyfikuje wartości które do niej przekazałeś. Po prostu umieszczasz wartości {x,y,z,…}, które zostały jej nadane w odpowiadających im pozycjach. Jeśli zbudujesz macierz, która ma ten sam zbiór wektorów ,wtedy możesz osiągnąć ten sam efekt. Ta podstawa w 3 x 3 była w postaci <<1,0,0>,<0,1,0>,<0,0,1>>, co oznacza ,że w rzeczywistości zbuduje macierz jak następuje:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Możesz sprawdzić ,czy macierz pomnożona przez dowolną macierz 3 x 3 nie daje oryginalnej macierzy, Możesz także sprawdzić ,czy zamiana tych dwóch macierzy nadal daje oryginalną macierz. W bardziej ogólnym sensie, macierz jednostkowa to macierz n x n dla której elementy po przekątnej są jedynkami, i dla których wszystkie pozostałe elementy są zerami. Pod względem równań otrzymujesz:

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & \leftarrow & 0 \\ \uparrow & 1 & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & 1 \end{bmatrix}$$

Norma Macierzy

Matryce zbudowane są z wektorów, więc nie powinno dziwić ,że one również niosą normę. Dla prawdziwej normy wektorowej przypisywana jest długość, w przypadku macierzy nie można jednak przypisać długości w sensie geometrycznym. W takim przypadku termin „norma” lub „wielkość” jest odpowiednia. Ponadto te same zasady normalizacji dotyczą zarówno wektorów jak i macierzy, a zatem normalna macierz jest macierzą z normą 1. Norma macierzy jest wyraźnym wskaźnikiem jakości systemu liniowego. Jak odkryjesz później, w sekcji o systemach liniowych, życie w świecie komputerowym jest zupełnie inne niż w świecie teoretycznym. Potrzebny jest zatem sposób identyfikacji, która macierz przyniesie oczekiwany wynika ,a które nie. Na przykład, jeśli użyjesz macierzy do obliczania przecięcia zestawy płaszczyzn, to rzeczywiście można oczekiwać ,że wynik będzie bardzo zbliżony do rzeczywistego rozwiązania, jeśli nie do prawdziwego rozwiązania. Wyłącznie trzech jednostek jest często nie do zaakceptowania. Po prostu spróbuj przypomnieć sobie , kiedy ostatni raz zastrzeliłeś kogoś w swojej ulubionej strzelance 3D, ale gra nie wykryła kolizji. Czasami możesz mieć całkowitą rację (to znaczy matematycznie powinieneś trafić na drugiego gracza), ale ponieważ programiści zdecydowali się na szybkość przed dokładności, jesteś martwy. Zanim przyjrzysz się dokładniej temu problemowi zacznijmy od spojrzenia w jaki sposób możemy obliczyć normę.

Norma Frobeniusa

Norma Frobeniusa jest jedną z najłatwiejszych do obliczenia norm, ponieważ równanie daje odpowiedź bez konieczności stosowania metod iteracyjnych lub bardziej zaangażowanych. Norma Frobeniusa jest również nazywana czasami normą euklidesową i definiowana jako pierwiastek kwadratowy z sumy bezwzględnego kwadratu jej elementów. W przypadku liczb rzeczywistych wartość bezwzględna nie dodaje nic nowego do równania, więc można zapisać normę Frobeniusa dla macierzy liczb rzeczywistych M n x m :

$$\|\mathbf{M}\|_F = \sqrt{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} m_{ij}{}^2}$$

p-norma Macierzy

Oczywiście, jeśli p-normę zdefiniowano dla wektorów, należy ją zdefiniować dla macierzy. Problem z p-normą polega na tym ,że równanie nie daje bezpośrednio odpowiedzi. Norma nie jest obliczana tak łatwo, jak może się wydawać. p-norma macierzy M n x m może zostać zapisana:

$$\|\mathbf{M}\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbf{Mx}\|_p$$

Jak widać, p-norma jest dość trudna do obliczenia , ponieważ w rzeczywistości jest to maksimum p-normy z Mx dla danego wektora x , którego p-norma to 1. To nie powinno być problemem , jednak ponieważ normy macierzy są najbardziej przydatne w twoim przypadku do określenie stabilności numerycznej macierzy. Możesz obliczyć algorytm stabilności numerycznej macierz przez obliczenie normy z M pomnożonej przez normę jej odwrotności. Oczywiście, jeśli patrzysz na 1-normę lub ∞-normę, możesz uzyskać znacznie łatwiejsze do opanowania równanie ,jak pokazano tutaj:

$$\|\mathbf{M}\|_1 = \max \|\mathbf{c}_i\|_1$$
$$\|\mathbf{M}\|_\infty = \max \|\mathbf{r}_i\|_1$$

Poniższa tabelka pokazuje kilka przykładów norm obliczonych dla danej macierzy M

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Norma	Wyrażenie	Wartość
F	$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2$	285
$p = 1$	3 + 6 + 9	18
$p = 2$		16.8481
$p = \infty$	7 + 8 + 9	24

Szczegóły obliczeń 2-normy nie są podane, głównie dlatego ,że nie masz jeszcze informacji niezbędnych dla zmaksymalizowań funkcji wielu zmiennych.

Zaawansowane Operacje I Właściwości

Macierze są tak wygodnym sposobem przestawiania rzeczy, które znalazły drogę w rozwiązaniu wielu problemów. Ponieważ hordy problemów można wyrazić za pomocą macierzy, wzrosło zapotrzebowanie na operacje podobne do tych, z których korzystałeś przy liczbach rzeczywistych. Inne rodzaje operacji macierzowych są bardziej podobnych do iloczynu wektorowego, które widziałeś wcześniej, mają one bardziej wyspecjalizowane zastosowanie, a zatem rozwiązuje jedynie ograniczony zestaw problemów

Systemy Liniowe

Jednym, z bardzo ważnych zastosowań macierzy jest reprezentacja układów równań liniowych . Układ równań liniowych jest rodziną równań o n równaniach liniowych i k zmiennych. Na przykład, następujący układ równań tworzy system liniowy:

2x-3y+z = 3

4x + 2z = 2

3x+2y-z = 1

Z perspetywy gry , taki układ liniowy mógłby reprezentować kolizję między zbiorem obiektów, a rozwiązanie układu liniowego byłby zatem punkt przecięcia obiektów. Macierze oferują bardzo wygodny sposób reprezentowania tego typu systemów , ponieważ umożliwiają łatwe wyodrębnienie współczynników zmiennych po prostu tworząc wektor zmiennej <x,y,z> i mnożąc go przez macierz. Poniższy zapis macierzowy jest równoważny z powyższym układem liniowym:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Możesz zweryfikować , że ta forma rzeczywiści reprezentuje poprzedni zestaw równań przez proste pomnożenie macierzy razem i przez sprawdzenie każdego wiersza jako równania. Istnieje wiele dobrych podejść do rozwiązania układu równań liniowych. Jedną z takich metod jest zastępowanie. Pomysł polega na wyizolowaniu jednej zmiennej w jednym równaniu, a następnie podstawieniu tej zmiennej w pozostałych równaniach. Jeśli zastosujesz ten proces iteracyjnie dla każdej zmiennej, ostatecznie otrzymasz jedną zmienną ,związaną bezpośrednio z jedną liczbą (zakładając ,że masz wystarczająco liniowo niezależnych równań aby rozwiązać problem). Inny podejściem jest dodawanie lub odejmowanie równań. Na przykład, jeśli dodasz razem pierwsze i ostatnie równanie, z powodzeniem znajdziesz rozwiązanie równania z jedną mniejszą zmienną : z. Możesz to robić , dopóki nie osiągniesz punktu, w którym pozostaje tylko jedna zmienna, w którym to momencie możesz poprawnie rozwiązać układ równań. W połączeniu z tą operacją jest fakt, że możesz także pomnożyć równanie przez skalar k nie modyfikując niczego w systemie. Na przykład, jeśli chcesz się pozbyć zmiennej x z pierwszego i drugiego równania, nie możesz tego zrobić za pomocą pojedynczego dodawania. Zamiast tego możesz dodać drugie równanie dwukrotnie lub jeśli wolisz, pomnożyć drugie równanie przez -2i dodać je do pierwszego. Jest to zasada , której użyjesz do rozwiązania takiego układu równań.

Metoda Gaussa

Ponieważ przenoszenie wszystkich tych zmiennych jest nieco uciążliwe, możesz zdefiniować nowy sposób pisania układów liniowych. Zamiast pisać wektor zmiennej i znak równości, możesz zastąpić to wszystko linią dzieląc współczynnik od tych wartości. W ten sposób równanie poprzedniej sekcji można przepisać następująco:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Jeśli będziesz używał skalarnego mnożenia wierszy połączone z dodawanie i odejmowaniem wierszy, możesz rozwiązać ten układ liniowy w tym formacie bardzo łatwo. Taka jest idea metody Gaussa. Jest to metoda , która pomaga rozwiązywać układy równań liniowych. Aby to zrobić, musisz najpierw pozbyć się jednej zmiennej. W poprzedniej sekcji nauczyłeś się x lub z , ale możesz pozbyć się dowolnej zmiennej, po prostu kalkulując oba wiersze tak ,że zmienna ,której chcesz się pozbyć , ma współczynnik 1.(Upewnij się ,że znak każdego równania jest taki , że ta zmienna jest anulowana). Inną operacją , która może być całkiem przydatną , jest to zmiana położenia wierszy. Jest to oczywiście legalne ponieważ w oryginalnym zestawie trzech równań można zamienić kolejność równań bez modyfikowania czegokolwiek. Dlatego ,aby rozwiązać liniowy układ równań, najpierw musisz się upewnić ,że pierwszy wiersz ma niezerowy współczynnik dla pierwszego komponentu. Dzięki niemu możesz pozbyć się tego samego komponentu dla pozostałych równań poniżej. Możesz zastosować ten proces rekursywnie na mniejszej macierzy , aby finalnie uzyskać układ gdzie dolny trójkąt jest macierzą ustawioną na 0. (Ten typ macierzy jest nazywany macierzą wyższego trójkąta). Zobaczmy jak dzieje się to na macierzy podanej poprzednio

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{Scale down } r_2 \text{ by } 2]{\text{Scale down } r_1 \text{ by } 2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{Subtract } 3r_1 \text{ by } r_3]{\text{Subtract } 2r_1 \text{ by } r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{Scale up } r_3 \text{ by } 2]{\text{Scale down } r_2 \text{ by } 3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 13 & -5 & -7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Subtract } 13r_2 \text{ from } r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -5 & \frac{5}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Scale down } r_2 \text{ by} -5} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Teraz możesz rozwiązać system poprzez zastąpienie wsteczne. Masz bezpośrednie rozwiązanie dla z, i w tym przypadku, tak się składa ,że masz również bezpośrednie rozwiązanie dla y. Aby rozwiązać x, możesz zstąpić y i z , więc zakończmy zadanie

$$z = -\frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}$$

$$x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}z = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Zatem , końcowe rozwiązanie problemu to <x,y,z> = <2,-2,-1>/3. Kiedy przychodzi czas na wdrożenie tego algorytmu, jest to znacznie trudniejsze, ponieważ redukcja wiersza czasami musi być wykonana w określonej kolejności

```
// Simple definitions to make things more readable
#define M00 Matrix[0][0]
#define M01 Matrix[0][1]
#define M02 Matrix[0][2]
#define M03 Matrix[0][3]
#define M10 Matrix[1][0]
#define M11 Matrix[1][1]
#define M12 Matrix[1][2]
#define M13 Matrix[1][3]
#define M20 Matrix[2][0]
#define M21 Matrix[2][1]
#define M22 Matrix[2][2]
#define M23 Matrix[2][3]

Vector3D Gauss(float Matrix[3][4])
{
    // Let's make sure that the co-efficient we will multiply with are
    // non-zero or else we are destroying our matrix
    if (M00 <= THREASHOLD) {
        if (abs(M10> THREASHOLD)
            SwapRows(Matrix, 0, 1);
        else if (abs(M20 > THREASHOLD)
            SwapRows(Matrix, 0, 2);
        else
            return false;
    }
```

```
    // Now we know that A is satisfied, we have to make sure both vectors are
    if (abs(matrix[1][1]) <= THREASHOLD) {
        if (M21 > THREASHOLD)
            SwapRows(Matrix, 2, 3);
        else if ((M01 > THREASHOLD) &&
                    (abs(M11 > THREASHOLD))
            SwapRows(Matrix, 1, 2);
        else
            return false;
    }

    if (abs(M22 <= THREASHOLD) {
        if ((abs(matrix[0][2]) > THREASHOLD) &&
                    (abs(M02) > THREASHOLD))
            SwapRows(Matrix, 1, 2);
        else if ((abs(M12) > THREASHOLD) &&
                    (abs(matrix[2][1]) > THREASHOLD))
            SwapRows(Matrix, 2, 3);
        else
            return false;
    }

    // Here, we just factored a few things which were common
    CrossY    = M00 * M11 - M01 * M10;    // AF - BE
    CrossZ    = M00 * M21 - M01 * M20;    // AJ - BI
    Val       = M03 * M10 - M00 * M13;    // DE - AH
    ValZ      = M00 * M12 - M02 * M10;    // AG - CE

    float Z = ((CrossY * (M03 * M20 - M00 * M23) - Val * CrossZ) /
* (M00 * M22 - M02 * M20) - ValZ* CrossZ));
    float Y =  ((Val - Z * ValZ) / CrossY);
    float X = ((-M02 * Z - M01 * Y - M03) / M00);

        return Vector3D(X, Y, Z);
}
```

Niestety, daleko jest od tego, by był świętym graalem, aby znaleźć rozwiązanie układu liniowego. Jest to dość wydajna metoda , ponieważ nie wymaga tak dużej ilości obliczeń, ale jest bardzo niestabilna liczbowo. Jeśli przetestujesz ten kod z kilkoma przykładowymi wartościami dla macierzy i zweryfikujesz dokładność metody poprzez zamianę rozwiązania z powrotem na równania, zauważysz ,że precyzja jest straszna. Jeśli zastąpisz rozwiązanie równaniami, powinieneś matematycznie uzyskać 0 po obu stronach równania. Im większa wartość, tym większy błąd. Z tą metodą wyliczyłem błędy do 10 wirtualnych jednostek ze znormalizowaną macierzą. Jeśli więc prędkość jest koniecznością, a precyzja nie ma większego znaczenia, może to być twój bilet. Błąd jest bardzo zły, ponieważ kończy się mnożeniem błędu. Innym słowy, błąd który pojawił się w X jest mnożony aby obliczyć błąd w Y i jest ponownie mnożony dla błędu w X, co daje potencjalnie dość dokładne Z, tak dokładne Y i całkowite X. Aby uzyskać nieco więcej mocy obliczeniowej, czy możesz uzyskać większą precyzję dla Y i X?

Metoda Gaussa-Jordana

Metoda Gaussa-Jordana jest wysoce inspirowana metodą Gaussa. Idea tej metody jest całkowite usunięcie wymogu stosowania zastąpienia wstecznego. Podejście do tego problemu w rzeczywistości bardzo proste; po prostu robisz to, co zrobiłeś metodą Gaussa- ale dla górnego trójkąta macierzy. Jeśli usuniesz każdy współczynnik z górnego i dolnego trójkąta, a wszystko, co pozostało , to macierz współczynników dopasowania do macierzy tożsamości plus kolumna wartości po prawej stronie, w zasadzie uzyskasz dopasowanie jeden do jednego, w którym jedna zmienna będzie bezpośrednio przypisana do jednej wartości. Aby spojrzeć na to z innej strony otrzymujemy równanie postaci **I**<x,y,z> = <a,b,c> co jest tym samym co <x,y,z> = <a,b,c>. Weźmy poprzedni przykład i zakończmy pracę przy użyciu metody Gaussa-Jordana

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Subtract } \frac{r_3}{2} \text{ from } r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Subtract } \frac{3r_2}{2} \text{ from } r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

To równanie daje te same wartości, które uzyskałeś za pomocą zastąpienia wstecznego, ale zamiast tego używa dodatków i skalowania, co jest po prostu innym sposobem robienia rzeczy. Dodatkową korzyścią jest to ,,że nie kumulujesz błędu z poprzednich rozwiązań, ale oczywiście robisz to po dodatkowej cenie złożoności i czasu procesora.

Układy Liniowe Z Nieskończoną Liczbą Rozwiązań

Nie wszystkie układy liniowe dają jedno, jednoznaczne rozwiązanie. Niektóre układy liniowe mają nieskończoną liczbę rozwiązań, w których to przypadku nie ma konkretnych wartości dla każdej zmiennej. Mimo to nadal możesz zainteresować się wartościami, które możesz wygenerować w celu spełnienia równań. Rozważmy na przykład następujący układ liniowy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Scale down } r_1 \text{ by } 2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Subtract } r_1 \text{ from } r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{Subtract } 2r_2 \text{ from } r_1]{\text{Subtract } r_2 \text{ from } r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Kończy się następującym zbiorem równań:

x + z = -1

y + z – 3

Niech z = t , parametr

x = -t -1

y = -t + 3

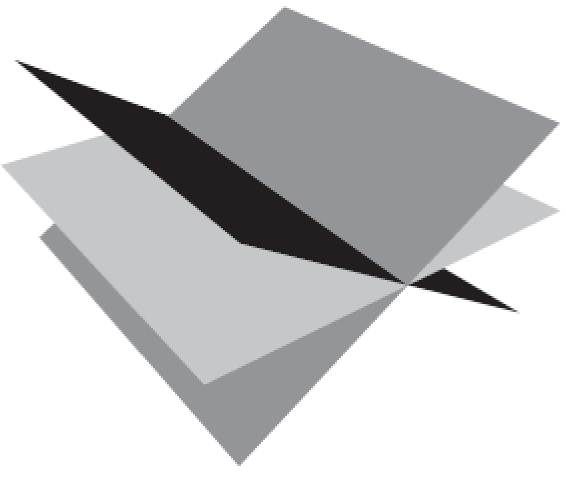
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

To co robisz, to przedefiniowanie zmiennej ,która jest nadmiarowa jako parametr, i konsekwentne wyrażenie równań w postaci parametrycznej. W tym przypadku jedyną opcją było sparametryzowanie z ponieważ z było tylko zmienną w nadmiarze. Nie można wyodrębnić dla z w sposób unikalny, co czyni z idealnym wyborem dla parametru. Jeśli dwa obiekty kolidowały ze sobą, obliczalibyśmy nieskończoną liczbę kolizji (ponieważ jedna sekcja wieloboku przecinałaby się z fragmentem innego wieloboku). Jeśli planujesz stworzyć fajny , całkowicie odkształcalny świat, może cię to zainteresować , ponieważ możesz chcieć wgnieść ziemię, gdy spadanie na niż ciężki przedmiot. Czasami może napotkać systemy, w których zmienna nie pojawia więcej niż raz. W takich przypadkach można wyodrębnić dowolną zmienną w równaniach niosących więcej niż dwie niewiadome, a każde rozwiązanie będzie dobrym rozwiązaniem dla systemu. Jest to zagwarantowane, jeśli system jest niedookreślony. Innymi słowy, jeśli masz mniej równań niż niewiadomych, masz gwarancję ,że będziesz w tej sytuacji. W poprzednim przykładzie niech t będzie wartością rzeczywistą i będzie spełniać zbiór równań , które zostały przedstawione. Powodem, dla którego ten układ trzech równań i trzech niewiadomych nie dał unikalnego rozwiązania, jest to , że równania nie są liniowo niezależne. Trzecie równanie może być wyrażone jako liniowa kombinacja dwóch pierwszych i tym samym nie daję żadnych nowych informacji do układu. Widać ,że nie dodaje żadnych nowych informacji, ponieważ jeden z wierszy unieważnia, pozostawiając tylko równania liniowo niezależne. Kiedy macierz nie ma liniowych zależności, mówimy ,że macierz jest macierzą pełnorzędową. Wręcz przeciwnie, gdy macierz ma n niepustych wierszy, mówimy ,że macierz jest rzędu n. Rząd macierzy może faktycznie określać liczbę parametrów wymaganych do wyrażania równania. Macierz z m wierszami i rzędu n będziemy mieli m x n parametrów. Innym sposobem spojrzenia na rząd jest liczba wierszy , które są liniowo niezależne. Ogólnie rzecz biorąc , do wykrywania kolizji w ten sposób, bardziej efektywne jest obliczanie równania, które jest specyficzne dla obiektów , z którymi masz do czynienia , niż wybór metody ogólnej.

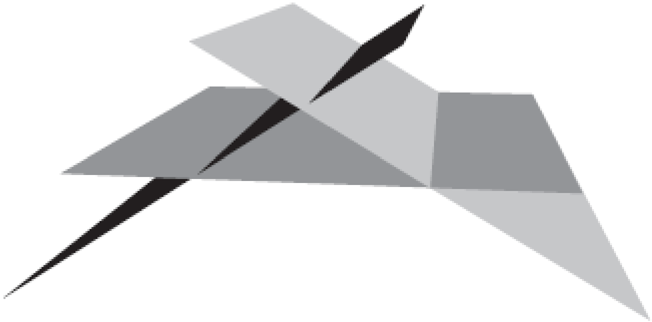
Gdzie Jest Moje Rozwiązanie?

Możliwe jest również posiadanie systemu, dla którego nie istnieje rozwiązanie. Jeśli ,na przykład, gracz strzela pociskiem równoległym do ziemi, bez grawitacji lub podobnej siły, pocisk nigdy nie uderzy o ziemię. W tym przypadku nie byłoby rozwiązania tego układu. Jeszcze nie zauważyłeś jak działają kolizję i ich bloki konstrukcyjne, więc w międzyczasie rozważ poprzednie równania, które w rzeczywistości są płaszczyznami w 3D. Biorąc pod uwagę trzy płaszczyzny, będziesz miał zwykle unikalne przecięcia. Innymi słowy, w przestrzeni będzie punkt , w którym wszystkie trzy płaszczyzny będą się dzielić, jak pokazano na rysunku, więc istnieje unikalne rozwiązanie dla systemu

Drugi możliwy scenariusz polega na tym ,że płaszczyzny są wyrównane, jak otwarte strony w książce. W takim przypadku podzielą one linie przecięcia, która można uznać za wiążąc książkę. Na poniższym rysunku, mamy nieskończoną liczbę rozwiązań dla układu



Ostatnim możliwym przypadkiem jest ten, w którym albo płaszczyzny nie przecinają się , ponieważ są równoległe, albo przecinają się dwa na dwa bez faktycznego wspólnego punktu przecięcia, jak poniżej, gdzie system nie ma rozwiązania



Matematycznie, brak rozwiązań oznacza ,że dostaniesz niespójność w swoich równaniach. Na przykład możesz otrzymać coś w rodzaku 0x + 0y + 0z = 3, co oczywiście nie jest możliwe.

Wyznacznik

Wyznacznik można uznać za kuzyna iloczynu wektorowego. To prawda, że nie daje on wektora ani macierzy, ale daje podobne wyniki do tych jaki widzieliśmy w iloczynie wektorowym. Wyznacznik ma geometryczną interpretację bycia podpisanym obszarem równoległościanu – hiper wolumenu utworzonego z równoległobokami jako powierzchniami. Dlatego też , w 2D, wyznacznik faktycznie równa się 2-normie iloczynu wektorowego. Wyznacznik jest zapisany w postaci wartości bezwzględnej. Dla macierzy 2 x 2 jest definiowany następująco

$$\begin{aligned}|\mathbf{M}| &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= ad - bc\end{aligned}$$

Jeśli pamiętasz , co działo się podczas obliczania iloczynu wektorowego dla wektora 2D, może pamiętasz ,że jest to w rzeczywistości równanie składnika z, gdy wszystkie pozostałe komponenty zostały wyzerowane. Bardziej ogólnie, dla macierzy n x n z n większym niż 2, wyznacznik jest definiowany następująco, gdzie k jest stałą całkowitą od 1 do n i gdzie M_{kj} jest minorem macierzy

$$|\mathbf{M}| = \sum_{i=1}^{n} m_{ki} (-1)^{i+k} |\mathbf{M}_{ki}|$$

Minor (wyznacznik) macierzy jest macierzą otrzymaną przez wyeliminowanie wiersza k i kolumny j

$$\mathbf{M}_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Inny wzór, który działa dla obliczania wyznacznika jest zdefiniowany następująco:

$$\left|\mathbf{M}\right| = \sum_{i=1}^{n} m_{ik} \left(-1\right)^{i+k} \left|\mathbf{M}_{ik}\right|$$

Większość implementacji po prostu wybiera wartość k = 1 i używan pierwszego równania, ale dowolna wartość dla k może tu wystarczyć i można użyć równania. Kontynuujmy przykład

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= 1(5\cdot 9 - 8\cdot 6) - 2(4\cdot 9 - 7\cdot 6) + 3(4\cdot 8 - 7\cdot 5)$$
$$= 1(-3) - 2(-6) + 3(-3)$$
$$= -3 + 12 - 9$$
$$= 0$$

Zwróć uwagę w jaki sposób ten przykład, używając pierwszego wzoru , przechodzi do wiersza, podczas gdy drugi wzór przechodzi do kolumny. Oznacza to ,że wyznacznik macierzy jest dokładnie taki sam jak wyznacznik jego transpozycji. W symbolach, otrzymujesz:

$$\left|\mathbf{M}\right| = \left|\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\right|$$

Wyznacznik jest bardzo ważną operacją, ponieważ pozwala ci wyrażać wiele rzeczy, takich jak iloczyn wektorowy, obszar objętościowy , stan układu liniowego i wiele innych. Dlatego warto sprawdzić co stanie się z wyznacznikiem, gdyż przetasujesz wartości macierzy. Wszystkie te działania mogą być rygorystycznie udowodnione ,ale w większości przypadków proste spojrzenie na równania i szybka ekspansja potwierdzą prawdziwość tych korelacji:

- Wymiana dwóch wierszy zmienia znak
- Wymiana dwóch kolumn zmienia znak
- Mnożenie wierszy może być dodawaniem razem bez zmiany wyznacznika
- Mnożenie kolumn może być dodawaniem razem bez zmiany wyznacznika
- Mnożenie skalarne wiersza przez k mnoży wyznacznik przez k

Wyznacznik ma kilka dodatkowych interesujących właściwości:

- Jeśli jeden z wierszy lub kolumn jest wypełniony zerami, cały wyznacznik wynosi zero. Wynika to jasno z dokładnie tej definicji wyznacznika. Po prostu wybierz wiersz lub kolumnę , która wynosi zero dla k, i wynika z tego ,że wszystko jest pomnożone przez zero
- Wyznacznik jest niezmiennikiem w całej metodzie Gaussa-Jordana ,z wyjątkiem przypadków, gdy wymieniane są wiersze, w których wyznacznik jest zanegowany, a cały wiersz jest skalowany. W tym drugim przypadku, musisz skalować wyznacznik przez współczynnik, jak wspomniano wcześniej. Jeśli pamiętasz, można było określić czy układ liniowy jest liniowo zależny, czy nie, patrząc na rząd macierzy. Macierz liniowo zależna ma pełny wiersz zer kiedy została zapisana w postaci zredukowanej za pomocą metody Gaussa. Oznacza to ,że jeśli dowolny z wierszy lub kolumn w macierzy jest liniowo zależny, wyznacznikiem będzie zero. Ma to sens, jeśli myślisz o wyznaczniku geometrycznie. Jeśli każda płaszczyzna była równoległa w 3D, jak mógłbyś obliczyć objętość równoległościanu.
- Wyznacznik dwóch macierzy A i B pomnożonych razem jest dokładnie taki sam jak wyznacznik A pomnożony przez ten z B. W żargonie matematycznym, wyraża się to następująco:

  $|AB| = |A||B|$

Metoda Gaussa pokazała ,że technika ta jest skalowana w dół, w taki sposób, że pierwszy niezerowy element został ustawiony na 1, aby łatwo mnożyć i odejmować względem drugiego wiersza. Jeśli robisz to z wyznacznikiem , musisz śledzić czynnik skali, który wyciągnąłeś. Innym sposobem podejścia do tego jest po prostu uwzględnienie czynnika skali jako części mnożenia wiersza. Wiesz ,ze nie wpływa to w żaden sposób na wyznacznik, ponieważ wciąż jest wielokrotnością wiersza dodawanego do innego Załóżmy na przykład, że wiersz przestawny (czyli wiersz używany do eliminacji niektórych elementów) ma wartość 2 a wiersz jaki chcesz zredukować ma wartość 3. W takim przypadku, można pomnożyć wiersz przez [3/2] i odjąć iloczyn tej operacji od drugiej. Wiesz już ,że dodanie wielokrotności wiersza do innego nie wpływa na wyznacznik; oznacza to ,że jedyną zmianą jaką musisz wprowadzić do wyznaczenia końcowej macierz jest zmiana znaku, jeśli zamienisz wiersze. Poniżej przedstawiono , w jaki sposób metoda Gaussa może zostać zastosowana do macierzy podczas obliczania wyznacznika tej macierzy:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Subtract } \frac{3}{2}\mathbf{r}_1 \text{ from } \mathbf{r}_3]{\text{Subtract } 2\mathbf{r}_1 \text{ from } \mathbf{r}_2} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Subtract } \frac{13}{12}\mathbf{r}_2 \text{ from } \mathbf{r}_3} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix}$$

Zatem wyznacznik macierzy początkowej jest dokładnie taki sam jak wyznacznik drugiej macierzy. Ale coś bardzo fajnego dzieje się, gdy umieścisz macierz w tym formacie. Na przykład, kiedy obliczamy wyznacznik, zawsze należy wybrać k takie ,że przetwarzany jest ostatni wiersz macierzy. Ponieważ ostatni wiersz będzie zawsze miał tylko jeden niezerowy element, wyznacznik stanie się łatwy do obliczenia. Jest to jedyny niezerowy termin pomnożony przez minor macierzy. Rekursywnie, jeśli zastosujesz tą logikę, zauważysz ,że wszystko co jest wymagane do obliczenia wyznacznika, biorąc pod uwagę macierz w rozszerzonej formie, to pomnożenie każdego elementu macierzy znajdującego się na przekątnej macierzy. Zatem, dla poprzedniego przykładu, wyznacznik to 2 * 6 * (-5) / 2 = -30. Zgodnie z oczekiwaniami daje to dokładnie taką samą wartość, jaką uzyskuje się , jeśli obliczymy wyznacznik macierzy początkowej. Matematycznie rzecz biorąc, dla niższego lub górnego trójkąta (jest to macierz dla której każdy niezerowy element znajduje się odpowiednio w górnym lub dolnym trójkącie), otrzymasz znaczni równanie dla obliczenia wyznacznika:

$$|\mathbf{M}| = \prod_{i=0}^{n} m_{ii}$$

Odwrotność

Kiedy mówimy o odwrotności i w kategoriach liczb rzeczywistych, znalezienie odpowiedzi jest łatwe. Jeśli patrzysz na liczbę r, jej odwrotność można łatwo uzyskać dzieląc 1 r. Znalezienie odwrotności macierzy jest jednak nieco bardziej skomplikowana. Na przykład , element neutralny I (tzn. 1), jest macierzą diagonalną z 1 .Aby naprawdę zrozumieć czym jest odwrotność, trzeba powrócić do jej definicji. Odwrotność A w ogólności jest macierzą B taką ,że AB = I, gdzie I jest macierzą jednostkową zbioru, która dla macierzy jest macierzą jednostkową. Reprezentuje odwrotność z potęgą -1. Jest to ta sama konwersja stosowana w przypadku liczb rzeczywistych. Dlatego dla M mamy:

$MM^{-1} = I$

Tożsamość ta również dostarcza inną przydatną tożsamość , której możesz użyć kiedy działasz z odwrotnością wielu macierzy :

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ten ostatni fragment jest dość łatwy do udowodnienia. Zrobimy to przez zastosowanie poprzedniej tożsamości. Innymi słowy, pokazujemy że $B^{-1}A^{-1}$ pomnożone przez AB jest tożsamością. Po prostu wstawa nawiasy na właściwych pozycjach, i powinieneś łatwo wywnioskować ten fakt

Metoda Inwersji Gaussa-Jordana

O metodzie inwersji Gaussa-Jordana łatwiej powiedzieć niż zrobić. Znalezienie odwrotności macierzy A wymaga sporej liczby obliczeń, jak można się spodziewać. Istnieje wiele metod aby to osiągnąć. Najprostsza jest oparta na metodzie Gaussa-Jordana. Chodzi o to ,że jeśli możesz zbudować macierz B taką ,że (BA) = I, możesz pomnożyć każdą stronę równania przez B, a tym samym uzyskać następujące równanie

$$\begin{aligned}(\mathbf{BA})\mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{BI}\\ \mathbf{IA}^{-1} &= \mathbf{B}\\ \mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{B}\end{aligned}$$

Pozostaje tylko pytanie jak stworzyć macierz B? Później przyjyrzymy się szczegółom, na razie przyjmuj za pewnik ,że ta metoda daje odwrotność. Chodzi o to aby zacząć od macierzy A|I. Już używałeś separatora, aby podzielić współczynnik macierzy na wartości; tutaj zrobimy to samo. Chodzi o to , aby uruchomić algorytm Gaussa-Jordana na tym zbiorze wierszy. Jeśli istnieje odwrotność, lewa strona separatora będzie utrzymywała macierz jednostkową, podczas gdy druga strona będzie utrzymywała odwrotność. Zilustrujemy to przykładem

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{Scale down } r_2 \text{ by } 2]{\text{Scale down } r_1 \text{ by } 2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{Subtract } 3r_1 \text{ by } r_3]{\text{Subtract } 2r_1 \text{ by } r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{Scale up } r_3 \text{ by } 2]{\text{Scale down } r_2 \text{ by } 3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 13 & -5 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Subtract } 13r_2 \text{ from } r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -\frac{4}{3} & -\frac{13}{6} & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Scale down } r_3 \text{ by } -5} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{15} & \frac{13}{30} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Subtract } \frac{r_3}{2} \text{ from } r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{19}{30} & -\frac{13}{60} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{15} & \frac{13}{30} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Subtract } \frac{3r_2}{2} \text{ from } r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{15} & \frac{13}{30} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]$$

Możesz sprawdzić czy ta macierz jest odwrotnością macierzy oryginalnej, po prostu mnożąc odwrotność przez oryginalną macierz. Biorąc pod uwagę tę metodę, powinno być oczywiste, że macierz zawierająca liniowo zależne wiersze nie ma odwrotności; w przeciwnym razie jak mógłbyś zbudować macierz jednostkową po lewej stronie? Macierz posiada odwrotność wtedy i tylko wtedy gdy wyznacznik macierzy jest niezerwy. Tu ponownie wracamy do braku unikalnych danych, a zatem generuje nieskończoną liczbę odwrotności, co nie ma sensu. w przypadku macierzy większych niż 4 x 4, jest to droga do wykonania. Oferuje całkiem skuteczny sposób radzenia sobie z rzeczami, ale ma problemy ze stabilnością, jak wspomniano wcześniej. W grze, najczęściej interesują nas macierze 4 x 4, więc nie powinieneś się tym przejmować , chyba ,że pracujesz z przypadkiem ezoterycznym.

Metoda Wyznacznikowa

Metoda inwersji Gaussa-Jordana jest nieco kłopotliwa przy obliczaniu wartości odwrotnej, ponieważ wymaga działania na wielu elementach w tym samym czasie. Istnieje jednak inna metoda ,ze pomocą której można obliczyć odwrotność za pomocą wyznacznika. Na papierze metoda ta wymaga dłuższego czasu obliczenie niż metoda Gaussa-Jordana, ale mówiąc obliczeniowo, jest najbardziej atrakcyjną opcją , jeśli wszystko jest tak obliczone ,że obliczenie jest ograniczone do minimum. Technika ta opiera się jednym prostym fakcie:

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{|\mathbf{A}_{ji}|}{|\mathbf{A}|}$$

Możesz sprawdzić czy ten wzór jest rzeczywiście prawdziwy, obliczając mnożenie macierzy A za pomocą macierzy B z indeksem ij. W rezultacie powinieneś otrzymać to ,że kiedy i = j , otrzymujesz 1, kiedy nie, otrzymujesz 0, ponieważ macierz końcowa będzie miała identyczne wiersze. końcowym rezultatem powinna być macierzą jednostkową. Co to oznacza dla Ciebie, to to , że możesz w rzeczywistości zapisać odwrotność macierzy element po elemencie, zastępując współczynnik poprzednią formułą. Ogólne równanie dla odwrotności może być zapisane tak:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{(\mathbf{M}^*)^{\mathrm{T}}}{|\mathbf{M}|}$$

Gdzie M^* jest nazywane macierzą sprzężoną z M, przy czym pierwsza jest macierzą, w której wartości w ij niosą wyznacznik wyznacznika macierzy ij. Ogólnie

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} |\mathbf{M}_{11}| & \cdots & (-1)^{i+1}|\mathbf{M}_{1i}| & \cdots & (-1)^{n+1}|\mathbf{M}_{1n}| \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{i+1}|\mathbf{M}_{i1}| & \cdots & |\mathbf{M}_{ii}| & \cdots & (-1)^{n+i}|\mathbf{M}_{in}| \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}|\mathbf{M}_{n1}| & \cdots & (-1)^{n+i}|\mathbf{M}_{ni}| & \cdots & |\mathbf{M}_{nn}| \end{bmatrix}$$

Wróćmy do naszego poprzedniego przykładu i zastosujmy tą technikę do niego:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{*}=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0(-1)-2\cdot 2 & -(4(-1)-3\cdot 2) & 4\cdot 2-3\cdot 0 \\ -((-3)(-1)-2\cdot 1) & 2(-1)-3\cdot 1 & -(2\cdot 2-3(-3)) \\ (-3)2-0\cdot 1 & -(2\cdot 2-4\cdot 1) & 2\cdot 0-4(-3) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -4 & 10 & 8 \\ -1 & -5 & -13 \\ -6 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{-1}=\frac{\left(\mathbf{M}^{*}\right)^{T}}{|\mathbf{M}|}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{4}{30} & -\frac{1}{30} & \frac{6}{30} \\ -\frac{10}{30} & \frac{5}{30} & -\frac{0}{30} \\ -\frac{8}{30} & \frac{13}{30} & -\frac{12}{30} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{4}{15} & \frac{13}{30} & -\frac{6}{15} \end{bmatrix}$$

Dekompozycja Macierzy

Widziałeś już o ile prostsze są niektóre obliczenia – takie jak wyznacznik – kiedy macie właściwy typ macierzy. W przypadku wyznacznika zobaczyłeś ,że niższy trójkąt lub górny trójkąt macierzy był łatwy do obliczenia w porównaniu do macierzy, w której nie możesz żadnych założeń. Czasami, gdy funkcje obliczeniowe takie jak odwrotność lub wyznaczniki na macierzowym mnożeniu ABC …, może to być istotną zaletą do obliczenia funkcji na każdej pojedynczej macierzy. Przez użycie właściwości omówionych wcześniej, możesz obliczyć funkcję dla iloczynu wszystkich macierzy przez obliczenie ich indywidualnie. Niestety, jednak, może się zdarzyć, że zaczniesz od macierzy, która nie daje bardzo dobrych obliczeń dla funkcji, którą chcesz obliczyć. W takich sytuacjach pojawia się odpowiedź : dekompozycja macierzy. W rzeczywistości nie chodzi o zmniejszenie czasu obliczeń .raczej chodzi o zwiększenie precyzji .Załóżmy ,że masz system liniowy i zdecydowałeś się uruchomić kilka cykli iteracji Gauss-Jordana na macierzy. Gdybyś obliczył błąd na podstawie losowych wartości macierzy, szybko doszedłbyś do wniosku ,że w twoim kodzie jest błąd. W rzeczywistości prawdopodobnie nie ma błędu w twoim kodzie. Problem polega na tym ,że punkty zmiennoprzecinkowe nie posiadają pełnej precyzji, którą teoretycznie ma liczba rzeczywista. Kiedy wykonujesz skomplikowane obliczenia, precyzja jest gubiona dla prawie każdej wykonywanej operacji matematycznej – niektóre bardziej niż inne. Ogólnie rzecz biorąc, można łatwo uzyskać błąd tak duży jak np. 2.5 ekranu dla cząstek w pobliżu aparatu. Jest to wyraźnie nie do zaakceptowania. Jeśli , na przykład, obliczałeś przecięcie tych równań z układem liniowym, byłby całkowicie błędny w punkcie przecięcia. Może stać się to ogromnym problemem. Wiele problemów ma rozwiązania, które przyjmują ogólne równanie , ale dodają trochę nadmiarowości w celu zmniejszenia błąd ,ale w ogólnym przypadku utkniesz.

Rozkład LU

„LU" w „rozkładzie LU", oznacza „Lower triangular" i „Upper triangular". Pomysł z dekompozycją LU polega na rozłożeniu macierzy n x n (czyli kwadratu) na iloczyn dwóch macierzy L jednej dolnej trójkątnej L i jednej górnej macierzy U. Macierze trójkątne świetnie nadają się do pracy , ponieważ są o wiele łatwiejsze w obsłudze – nie tylko do obliczenia wyznacznika i odwrotności, ale także do rozwiązania układu liniowego w sposób stabilny. Zanim zajmiemy się niezliczonym zastosowaniami dekompozycji LU, powinieneś najpierw przyjrzeć się , jak możesz uzyskać te dwie macierze. Pomysł jest prosty, a jako dodatkowy bonus pomoże ci zrozumieć dlaczego pierwsza metoda odwrotności działa przy użyciu metody Gaussa. Każda operacja gaussowska (lub jeśli wolisz, każdy krok) może być wyrażona w formie macierzy pomnożonej przez macierz oryginalną. Jest to właściwie matematyczny sposób zastosowania metody Gaussa na macierzy , i zostało pokazane gdy wprowadzono systemy liniowe. Metoda Gaussa jest interesująca ponieważ zastosowanie jej daję górną macierz trójkątną (to znaczy macierz, w której niezerowe wyrazy znajdują się w górnej macierzy trójkątnej). W przypadku dolnej macierzy trójkątnej musimy popracować trochę ciężej, ale nie za wiele. Kiedy stosujemy metodę Gaussa, po prostu musisz umieścić podpisany czynnik we właściwej pozycji macierzy jednostkowej, aby dodać lub odjąć wielokrotność jednego całego wiersza. Prosta obserwacja mnożenia macierzy, szybko ujawni pozycję, której trzeba umieścić czynnik. W szczególności powinien zawsze być umieszczony w miejscu , w którym chcesz unieważnić współczynniki oryginalnej macierzy .Poniżej znajduje się przykład, który pokazuje w jaki sposób pierwszy wyraz trzeciego wiersza może zostać stłumiony przez liniową kombinację pierwszego wiersza i trzeciego wiersza za pomocą metody Gaussa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

Poniższy pseudo-kod pokazuje jak zaimplementować tą technikę

```
for (k = 1 ; k < n - 1 ; k++) {
    if (Matrix[k][k] == 0) exit;      // Macierz nie ma inwersji
    Zamień z wierszem l, który jest taki, że Macierz [l][k] jest elementem o największej normie
    dla kolumny k
    for (i = k + 1 ; i < n - 1 ; i++) {
        Matrix[i][k] /= Matrix[k][k];
        for (j = k + 1 ; j < n - 1 ; j++)
            matrix[i][j] -= Matrix[i][k] * Matrix[k][j];
    }
}
```

Zauważ ,że każda pojedyncza macierz multiplikatywna, której używasz do zredukowania, będzie dolną trójkątną. To właśnie tutaj staje się naprawdę interesująca, ponieważ masz po lewej stronie kilka niższych trójkątnych macierzy i jedną górną macierz trójkątną po prawej stronie. Jeśli chodzi o równanie, po zastosowaniu wszystkich kroków dla metody Gaussa z powiązanymi macierzami A_i , na macierzy M, otrzymujemy :

$$\left(\prod_{i=1}^{\frac{n^2-n}{2}} \mathbf{A}_i\right)\mathbf{M} = \mathbf{U}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{\frac{n^2-n}{2}} \mathbf{A}_i\right)^{-1}\left(\prod_{i=1}^{\frac{n^2-n}{2}} \mathbf{A}_i\right)\mathbf{M} = \left(\prod_{i=1}^{\frac{n^2-n}{2}} \mathbf{A}_i\right)^{-1}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{LU}$$

Jak wspomniani, macierze trójkątne są o wiele przyjemniejsze w obsłudze. Jedna właściwość jaką posiadają jest następująca, którą można uogólnić na macierze wymiaru n x n:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$$

Możesz także sprawdzić czy odwrotność macierzy trójkątnej jest wyjątkowo łatwa i daje następujące równanie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ a_{1n} & \cdots & a_{(n-1)n} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{12} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ -a_{1n} & \cdots & -a_{(n-1)n} & 1 \end{bmatrix}$$

Dzięki obu tym właściwościom, iloczyn odwrotny macierzy kroków Gaussa, odnosi się do powyższego jako L, będzie dolną macierzą trójkątną. Możesz łatwo pominąć krok obliczania odwrotności i pomnożenia kroków macierzy razem i po prostu zbudować L bezpośrednio, ale aby być nieco bardziej rygorystycznym, poniższy przykład pokazuje proces przez zastosowanie go w dłuższym okresie:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{12} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{13}{12} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{13}{12} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Wszystko to sprowadza się do przykładu stabilności macierzy, która została podana. Innymi słowy, czy chcesz aby twoje kolizje były precyzyjne czy na pół ekranu? Jeśli uważasz ,że przejście gry podwójnie rozwiąże problem ,jesteś w błędzie. Gra podwójna trochę ci pomoże ,ale nadał będziesz miał pewną niestabilność liczbową w swoim równaniu. Wymagana precyzja zależy od Ciebie. Ogólnie rzecz biorąc, większość gier stabilizuje się na metodzie wyznacznika. Staje się to atrakcyjne , gdy możesz pozwolić sobie na różne poziomy precyzji. Na przykład, jeśli uruchomisz serwer dedykowany , może on być w stanie pozwolić sobie na ten rodzaj dekompozycji i może powiadomić klientów, gdy wystąpiła kolizja i nie została dobrze obliczona na klientach. Tymczasem klienci mogą uruchomić szybszą, mniej dokładną wersję.

Dekompozycja Choleskiego

Dekompozycja LU jest doskonała dla macierzy kwadratowych, ale jest inna metoda dla szybszego obliczania , jeśli mamy do czynienia z macierzami symetrycznymi, które są określone jako dodatnie : rozkład Choleskiego. Macierz jest określona jako dodatnia jeśli $x^T Mx > 0$ dla wszystkich wektorów x.

Ustalenie czy macierz jest to określona dodatnio, nie jest łatwym zadaniem. Najprostszym sposobem rozwiązania tego problemu jest próba sprawdzenia czy rozkład Choleskiego istnieje poprzez zastosowanie metody rozkładu Choleskiego .Jeśli zostaniesz zmuszony do obliczenia pierwiastka kwadratowego z wartości ujemnej, to na pewno wiesz ,ze macierz nie jest określona pozytywnie. Podobnie jak rozkład LU, rozkład Choelskiego również tworzy jedną górną macierz trójkątną i jedną dolną macierz trójkątną. Dzięki symetrii, może ona uczynić całkiem skuteczny rozkład. Aby uzyskać rozkład Choleskiego, po prostu weź dwie macierze, jedną dolną trójkątną i jedną górną trójkątną, gdzie pierwsza macierz jest transpozycją drugiej. Aby uzyskać współczynnik, wystarczy wyprowadzić równania z niewiadomymi ze znanymi i wyodrębninymi dla każdej z nich jak pokazano poniższym równaniu ogólnym

$$\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ii} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ b_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{i1} & \cdots & b_{n1} \\ 0 & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & b_{ii} & \cdots & b_{ni} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Po prostu rozwiń i wyodrębnij dla każdego b_{ij}, i powinieneś być w stanie uzyskać równania, a następnie wartości dla dekompozycji. Ta dekompozycja jest dość łatwa do przetworzenia, ale w celu dokładnego wyjaśnienia pokażmy przykład

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2 & ab & ad \\ ab & b^2 + c^2 & db + ec \\ ad & db + ec & d^2 + e^2 + f^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$a^2 = 4$$
$$a = 2$$

$$ab = 0$$
$$b = 0$$

$$b^2 + c^2 = 1$$
$$c = 1$$

$$ad = \mathbf{2}$$
$$d = 1$$

$$db + ec = 2$$
$$d = 1$$

$$db + ex = 2$$
$$e = 2$$

$$d^2 + e^2 + f^2 = 14$$
$$f = 3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 14 \end{bmatrix}$$

Dokładniejsze Rozwiązywanie Układów Równań Liniowych

Te dekompozycje mogą być bardzo pomocne w znalezieniu rozwiązania dla Ax = b, układu liniowego. logika po prostu używa właściwości macierzy. Następująca logika;

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$(\mathbf{LU})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{Uy} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{Lx} = \mathbf{y}$$

Kroki nie są skomplikowane. Najpierw rozwiązujesz dla y w równaniu Uy = b. Jest to coś , co można łatwo zrobić poprzez zastąpienie wsteczne ponieważ U jest górne trójkątne. Następnie rozwiązujesz dla x w równaniu Lx = y. Jest to również łatwe do obliczenia ponieważ można to zrobić przez zastąpienie w przód. Poniższy przykład pokazuje jak rozwiązać układ liniowy z rozkładem Choleskiego:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$3x = 9$$
$$c = 3$$

$$b + 2c = 0$$
$$b = -6$$

$$2a + c = 1$$
$$a = -1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$2x = -1$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

$$y = -6$$

$$x + 2y + 3z = 3$$
$$z = \frac{31}{6}$$

Jest to zdecydowanie dłuższe do obliczenia niż inne metody lub obliczanie odwrotności a następnie pomnożenie go przez wektor, ale okazało się ,że jest znacznie bardziej stabilne. Ostatecznie wszystko zależy od tego , ile precyzji potrzebujesz i na co ją stać. Ponadto, można zastosować inne techniki, aby pomóc w precyzji, takie skalowanie macierzy u układanie wierszy tak, aby największe liczby leżały na przekątnej. Ale generalnie nie potrzebujemy tak dużej precyzji, jeśli chodzi o układy liniowe. Podczas pisania gry ważne jest ,aby określić czy należy zastosować dekompozycję innej metody. Możesz to sprawdzić obliczając wskaźnik uwarunkowania macierz. Ten skalar wskazuje liczbową stabilność macierzy i jest liczbą, która jest względna w stosunku do normy macierzy. Bardzo duża liczba wskazuje na bardzo niestabilną matrycę. Wskaźnik uwarunkowania jest wyliczany jako taki dla macierzy kwadratowych

$k = ||A|| \, ||A^{-1}||$

Logarytm od podstawie 2 z k dla macierzy A jest oszacowaniem liczby utraconych bitów podczas rozwiązywania układu liniowego. Poniżej mamy kilka przykładów

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0.45 & -0.89 & 0\\ 0.89 & 0.45 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0.45 & 0.89 & 0\\ -0.89 & 0.45 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\|_F\|\mathbf{A}^{-1}\|_F &= 1.72\cdot 1.72\\ &= 2.98\\ &\approx 2 \text{ bit of lost precision (Reasonable)}\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}10000 & 10 & 0\\ 1 & 100 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, \mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{10}{99999} & \frac{-1}{99999} & 0\\ \frac{-1}{99999} & \frac{10}{99999} & 0\\ \frac{1}{199998} & \frac{-500}{99999} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{B}\|_F\|\mathbf{B}^{-1}\|_F &= 10000.5\cdot 0.5\\ &= 5001.5\\ &\approx \text{ 13 bitów uraconej precyzji}\end{aligned}$$

Kiedy takie rzeczy się zdarzają, możesz rozważyć renormalizację wierszy. Na przykład, pierwszy wiersz może być podzielony przez 10 000. Tak długo jak śledzisz czynnik, aby ponownie go zastosować, nie powinieneś mieć problemu . W ten sposób ustabilizujesz macierz, pracując z liczbami, które są wewnątrz tego samego względnego zakresu To naprawdę klucz do posiadania stabilnej macierzy.

Wektor charakterystyczny (własny)

Wektory własne i wartości własne są pojęciami, które nie są prawie wcale przydatne w grach, ale mimo to mają zastosowanie. Jak zobaczymy później, są one kluczem do określenia orientacji różnych otaczających wolumenów. Dla każdej odwracalnej macierzy M istnieje zbiór wektorów v_i , zwanych wektorami własnymi, które zmieniają się tylko w normie a nie w kierunku Matematycznie, jest to wyrażone następująco:

$$\mathbf{M}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

Tutaj [I] Jest definiowane jako wartość własną , i jest mnożnikiem wektora własnego. Reorganizując równanie, otrzymamy

$$(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Implikuje to ,że wyznacznik pierwszej części musi być 0. Możesz więc znaleźć wartości własne mając na uwadze ten szczegół

$$\det(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}) = |\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}| = 0$$

Pozostałą część tego problemu najlepiej wyjaśnić na przykładzie. Weźmy macierz 2 x 2. Możesz znaleźć wartości własne po prostu obliczając wyznacznik macierzy

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}| &= \mathbf{0} \\ &= \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} \right| \\ &= (1-\lambda)(-1-\lambda) - 2^2 \\ &= \lambda^2 - 5 \\ \lambda &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

Krótko mówiąc, aby obliczyć wyznacznik, należy zastosować technikę pokazaną w tej części. Wyznacznik zawsz da ci stopień wielomianu, który jest najwyższym stopniem macierzy. Można abstrakcyjnie obliczyć wyznacznik macierzy w celu uzyskania ogólnego równania dla wyznacznika z macierzy 2 x 2. Będzie to konieczne, gdy nadejdzie czas implementacji. Kiedy już wiesz jak wygląda wielomian, musisz użyć technik rozwiązywania równań kwadratowych. Podobnie jeśli chcesz znaleźć wektory własne / wartości własne macierzy 3 x 3, musisz znaleźć pierwiastek wielomianu sześciennego. Ogólnie rzecz biorąc , te obliczenia można wykonać w czasie uruchamiania, więc nie powinieneś zbytnio dbać o prędkość. Gdy masz wartości własne musisz znaleźć wektory własne. Biorąc pod uwagę powyższą definicję, wszystko co musisz zrobić, to rozwiązać układ liniowy:

$$(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Trudna częścią tego układu liniowego jest to ,że zawsze da on system nieokreślony. Dokładniej mówią , da układ z nieskończoną liczbą rozwiązań. Technika rozwiązywania tego typu problemu znajduje się w tej części. Kontynuując poprzedni przykład :

$$(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\sqrt{5} & 2 \\ 2 & -1-\sqrt{5} \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\sqrt{5} & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zgodnie z oczekiwaniami, jest to system z nieskończoną liczbą rozwiązań. Teraz musisz znaleźć ogólne rozwiązanie tego układu. Jak pokazano wcześniej, powinieneś uzyskać następujące informacje:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1-\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

W ten sposób znalazłeś swój pierwszy wektor własny. Jeśli zrobisz to dla drugiego pierwiastka wielomianu. możesz uzyskać drugi wektor własny

$$(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & 2 \\ 2 & -1+\sqrt{5} \end{bmatrix}\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

W konsekwencji, twoje dwie wartości własne to

$$\mathbf{v}_i = \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1-\sqrt{5} \end{bmatrix}\right\}$$

Co ciekawe, można również zauważyć, że te dwa wektory są ortogonalne. Jest to zawsze prawdziwe dla wektorów własnych. Zawsze formuje podstawę

Diagonalizacja

istnieje jeden obszar , w którym użyteczne są wektory własne. Kiedy masz macierz M, może być przydatna diagonalizacja macierz. Jest to proces przejmowania macierzy M i przekształcenie jej poprzez zbiór operacji w prostą macierz diagonalną , w której tylko elementy diagonalne są niezerowe. W gruncie rzeczy możesz pokusić się o nazwanie metody Gaussa-Jordana procesem diagonalizacji, ale termin diagonalizacji ma zastosowanie tylko do macierzy n x n. Nie ma sensu udowadnianie tego twierdzenia, ponieważ jest to rzadki przypadek, ale można wykazać ,że wiersz – wektor wektorów własnych V formuje macierz dla której zachodzi:

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Można to udowodnić , przez pomnożenie jej dłuższą drogą. Zazwyczaj diagonalizacja macierzy dla gier nie jest przydatna. To co jest użyteczne to to ,że macierz V może diagonalizować macierz.

Wersja Wektorowa

Macierze są oczywiście bardzo potężnymi obiektami, za pomocą których można robić wiele rzeczy. Jedną z rzeczy do jakiej można użyć macierzy, jest pisanie wektorów . Możesz łatwo użyć konwencji macierzy kiedy piszesz wektory. Zmienia to niektóre równania, ponieważ macierz może być również używaną do reprezentowania dowolnej innej transformacji liniowej. Ta sekcja obejmuje wszystko , co widziałeś do tej pory, ale stara się pokazać te pomysły pod różnymi kątami. Szybkie rozszerzenie każdej formuły powinny łatwo wykazać ,że równania są rzeczywiście równoważne

Iloczyn Skalarny

Forma wektora to 1D; zatem nie ma żadnego sensu dwuwymiarowe umieszczanie wektorów. Kiedy piszesz wektor, nie ma znaczenia , czy piszesz je jako kolumnę czy jako wiersz, w końcu wektor jest wektorem. Nie jest to jednak prawdą w przypadku macierzy. Podczas mnożenia macierzy wiersze pierwszej macierzy są mnożone przez kolumnę drugiej macierzy. Dlatego, w notacji macierzowej, możesz przedstawić iloczyn skalarny dwóch wektorów A, B w notacji macierzy za pomocą poniższej formuły

$$\mathbf{AB}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Jest to przydatne, kiedy nadchodzi czas pracy z transformacjami, ponieważ umożliwia pracę tylko z macierzami. Biorąc pod uwagę oryginalną definicję macierzy, jasne jest ,że można reprezentować wektor za pomocą notacji macierzy. Macierz została zdefiniowana jako wektor wektora. Jeśli wybierzesz tylko pojedynczy wektor, otrzymasz pojedynczy wektor

Rzutowanie Wektora Na Wektor

Rzutowanie jednego wektora na drugi , co ciekawe, może być wyrażone w notacji macierzowej. Tu macierz po prostu wykorzystuje fakt ,że możliwe jest przeprowadzenie transformacji liniowej w nieco mniej uciążliwej notacji. Wzór do oblicza rzutu wektora A na B jest określony przez :

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}) = \frac{1}{\|\mathbf{B}\|^2} \begin{bmatrix} b_1^{\ 2} & \cdots & b_1 b_i & \cdots & b_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 b_i & \cdots & b_i^{\ 2} & \cdots & b_i b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 b_n & \cdots & b_i b_n & \cdots & b_n^{\ 2} \end{bmatrix}$$

Może się to wydawać o wiele bardziej uciążliwą formułą do pracy – i w rzeczywistości, jest. Ale jeśli pracujesz na sprzęcie, który przyspiesza obliczenia macierzowe, wtedy warto byłoby wyrazić swoją projekcję używając tego wzór.

Iloczyn Wektorowy

Nie powinno to dziwić, ponieważ w tej części dużo mówiliśmy o związkach z wyznacznikiem. Załóżmy ze definiujemy trzy wektory i,j i k jako wektory jednostkowe , równoległe do równoległe do os x,y i z odpowiednio. Biorąc pod uwagę ten zapis iloczyn wektorowy dwóch wektorów a i b można byłoby obliczyć przy użyciu następującej postaci wyznacznika:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

Co ciekawe, wprowadza to również inny sposób reprezentowania wektorów. Każda liczba rzeczywista pomnożona przez i staje się komponentem x, j jest powiązane z y , a k jest powiązane z z. Innymi słowy wektor w postaci 1i + 2j – 3z jest w rzeczywistości taki sam jak wektor <1,2,-3>. Jest to zgrabny sposób przedstawiania iloczynu wektorowego, ale nie jest to jedyny sposób (poza makabryczną formułą podaną wcześniej). W notacji macierzowej można również wyrazić iloczyn wektorowy następująco

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0 & -a_z & a_y\\ a_z & 0 & -a_x\\ -a_y & a_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_x\\ b_y\\ b_z\end{bmatrix}$$

Można także obliczyć wyznacznik macierzy 3 x 3 używając iloczynu skalarnego i wektorowego .Odpowiedź został już w większości podana przy użyciu pierwszej metody obliczania wyznacznika. Obliczenie wyznacznika można również wykonać za pomocą trzech wektorów a,b i c w następujący sposób:

$$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\bullet\mathbf{c}$$