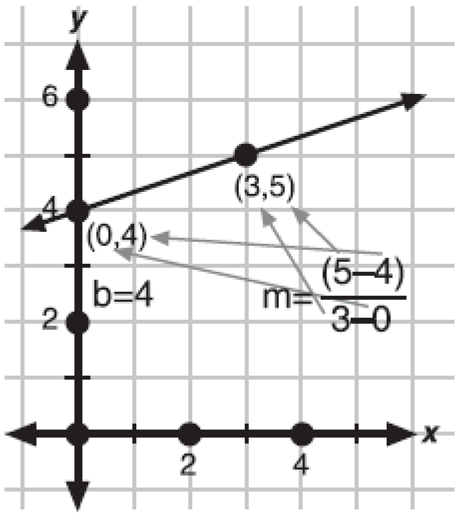
IV. Podstawowe Elementy Geometryczne

Nie prowadzono żadnych badań w tej sprawie, ale uważam ,że geometria jest najbardziej zabawną i lubianą dziedziną matematyki. Geometria jest tak wizualna ,że ułatwia zabawę. Mimo to, geometria może być również dość skomplikowana, jak zobaczysz w późniejszych częściach. Faktem jest ,że geometria jest jedną z tych dziedzin, która zawsze będzie przydatna niezależnie od nowych rzeczy jakich się nauczysz. W pewnym momencie m nauka może znaleźć coś co zastąpi macierze i może wyeliminować stosowanie wektorów, ale geometria nadal będzie stosowana w grach, ponieważ opisuje ona to co widzisz na ekranie. Tu skupimy się ma równaniach używanych do tworzenia różnych obiektów geometrycznych i zależności między różnymi geometriami. Zrozumienie, w jaki sposób tworzone są różne geometrie, jest ważne , ponieważ stanowią one podstawę wielu bardziej zaawansowanych kształtów. Ponadto, ponieważ obecnie nie można obejść się bez modułu ładującego obiekty, przyjrzymy się również ogólnym strukturom używanym przez popularne formaty plików obiektów. Ta część obejmuje

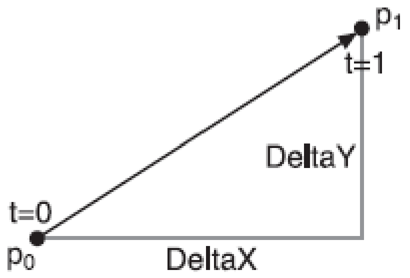
- Linie, płaszczyzny i kule
- Przecięcia między dwoma elementami (wierzchołkiem, linią, płaszczyzną)
- Najkrótszą odległość między dwoma elementami (wierzchołek, linia, płaszczyzna)
- Format plik struktury 3D

Tworzenie Linii

Widziałeś już najprostszy obiekt geometryczny 3D jaki kiedykolwiek można stworzyć – wierzchołek – więc przejdźmy do drugiego najprostszego – linii. Są szanse ,że znasz już równanie dla linii 2D : y = mx+b, jak pokazano poniżej



Chociaż ten wzór jest dobrym początkiem, jest dość restrykcyjny i oferuje bardzo mało gdy przenosisz się do przestrzeni 3D lub wyższej. W tej wersji równania m jest nazywane nachyleniem, i określa nachylenie linii. Wartość 0 daje linię poziomą, a wartość która dąży do nieskończoności, daje linię pionową. Ta wersja równania może być również postrzegana jako równanie wielomianowe pierwszego stopnia. Ta definicja linii jest nieco kłopotliwa, ponieważ definiuje linię nieskończoną . Kiedy przychodzi czas na zdefiniowanie linii skończonej, staje się bardziej praktyczne związanie zmiennej. Bardziej praktycznej jest również zapisanie linii jak interpolacji lub jeśli wolisz , jako prostej zmiany położenia z jednego wierzchołka do drugiego. Możesz zapisać równanie skończonej linii z punktami końcowymi p_1 i p_0 oraz z t, co pokazano poniżej



wraz z procentową wartością jak blisko jesteś p_1 poczynając od p_0 , jak następuje:

$$\mathbf{p}(t) = t\mathbf{p}_1 + (t-1)\mathbf{p}_0$$

To równie może wydawać się wywodzić znikąd, ale w rzeczywistości jest to parametryczna forma linii. Zaobserwujmy poniższą dedukcję:

$$y = mx + b$$

$$y = \frac{\Delta yx}{\Delta x} + b$$

$$f(t) = \begin{Bmatrix} x = t \\ y = \dfrac{\Delta yt}{\Delta x} + b \end{Bmatrix}$$

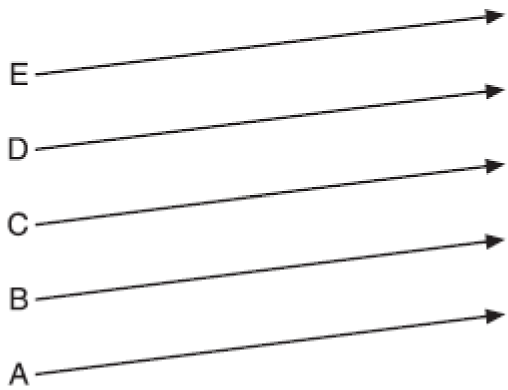
$$f(t\Delta x) = \begin{Bmatrix} x = \Delta xt \\ y = \Delta yt + b \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(t') &= \langle 0, b \rangle + t\langle \Delta x, \Delta y \rangle \\ &= \langle p_{0x}, p_{0y} \rangle + t\langle p_{1x} - p_{0x}, p_{1y} - p_{0y} \rangle \\ &= \mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \\ &= t\mathbf{p}_1 + (1-t)\mathbf{p}_0 \end{aligned}$$

Jak widziałeś w części I, przekształcenie funkcji na równanie parametryczne jest bardzo proste. Robi się ciekawiej, gdy przychodzi czas aby równanie było bardziej przyjazne i znaczące Ponieważ ogólne równanie linii nie jest ograniczone między dwoma wierzchołkami, możesz skalować lub tłumaczyć parametr t bez faktycznej zmiany wykresu równania. Ciekawe jest to ,że jeśli skalkulujesz t prze delta , odkryjesz ,że równanie może być zapisane jako jeden punkt na linii <0,b> plus liniowa kombinacja nachylenia w x i y. Ponieważ możesz ponownie zastąpić t czymkolwiek , jeśli zastąpisz go przez (t+a), biorąc pod uwagę ,że a jest skalarem arbitralnym, wynik nadal jest punktem na linii i możesz po prostu uwzględnić to równanie tak ,że wygląda jak c+td. W związku tym drugi termin tak naprawdę się nie zmienia, ale pierwszy tak. Ponieważ równanie to nadal daje wierzchołem na linii, c jest samo w sobie punktem na linii, co oznacz ,że faktycznie można wybrać dowolny punkt na linii dla c. Ponieważ nie chcemy się zajmować trzema wierzchołkami w celu zbudowania linii, po prostu wybierasz d , aby było p_1 (jedne z dwóch punktów końcowych) i obliczasz wartość delta jako różnicę między p_1 a p_0. Podsumowując, to sprawia ,że równanie jest łatwiejsze do pracy. Poza tym ,że jest łatwiejsze, łatwo jest również zobaczyć jak równanie to działa w 3D. Ponadto równanie to waha się od jednego wierzchołka do drugiego z t jako procentem (to znaczy z zakresu [0,1]). łatwo zauważyć ,że gdy t = 0, wynikiem jest jeden wierzchołek; kiedy t = 1, drugi wierzchołek jest wynikiem. Przedostatnie równanie , pokazane tu, jest równie niezmiernie ciekawe dla linii nieskończonych

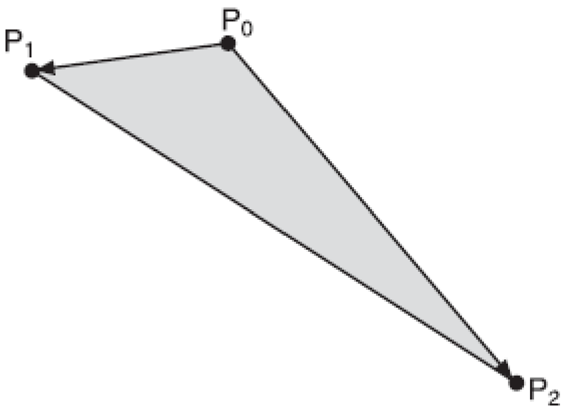
$$f(t)=\mathbf{p}_0+t(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_0)$$

Dzieje się tak częściowo dlatego ,że ma tylko jedno mnożenie, ale również dlatego, że oferuje kompleksową interpretację geometryczną Oczywiście dobrze jest znać wzory, ale dobrze jest też zrozumieć dlaczego działają poza algebrą. Zasadniczo wektor uzyskany przez odjęcie dwóch wierzchołków jest składową nachylenia. (DeltaX i DeltaY) linii. W skrócie, dla takiego wektora <a , b , c > równanie mówi ci ,że dla jednej abstrakcyjnej jednostki (która jest t = 1), komponent x przenosi a, komponent y przenosi b a komponent z przenosić c. Ten sam proces może być wydedukowany dla linii 2D . Zatem, możesz łatwo zobaczyć, jak zmiana jednego {a,b,c} wpływa na nachylenie linii . Z drugiej strony, możesz wygenerować nieskończoną liczbę linii z dowolnym nachyleniem. Aby jednoznacznie zidentyfikować tę linię, musisz zakotwiczyć linię, dokonuje się tego przez dodanie p_0, jak poniżej



Generowanie Płaszczyzn

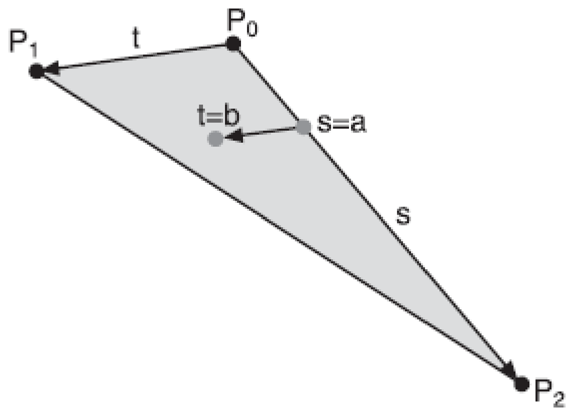
Widziałeś powyżej, że linie mogą być wyrażone jako równania parametryczne rzędu 1 (to znaczy, gdzie najwyższą potęgą jest 1). Jeśli równanie można wyrazić za pomocą jednego parametru, można łatwo przewidzieć ,że równanie można zapisać za pomocą dwóch parametrów. Płaszczyzna jest dokładnie tym. Ze względu na fakt ,że istnieją dwa parametry, równanie jest znacznie mniej restrykcyjne, a ponieważ równanie jest wciąż kombinacją liniową, musi mieć charakter liniowy. Jak pokazano na poniższym rysunku



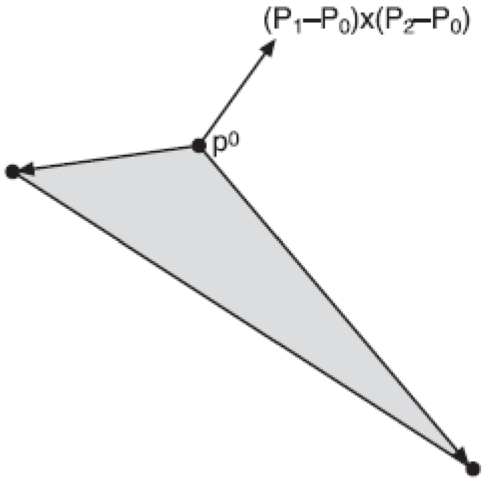
płaszczyzna może być widziana geometrycznie jako arkusz papieru w przestrzeni 3D z równaniem parametrycznym f(s,t) dla trzech unikalnych wierzchołków – p_0,p_1 i p_2 – i dwa parametry s i r. Jeśli wybierzesz wartość dla <s, t> takie jak <0,1> czy <1,0> z <0,0>, zobaczysz , że otrzymasz równanie dwóch różnych linii. Zakładając ,że P_2 nie jest równe p_1, otrzymujesz linie opisane przez wektory $p_1 - p_0$ i $P_2 - p_0$ i oba zakotwiczone przy p_0.

$$f(s,t) = \mathbf{p_0} + s(\mathbf{p_1} - \mathbf{p_0}) + t(\mathbf{p_2} - \mathbf{p_0})$$

Jeśli te dwie linie nie różnią się od siebie, naprawdę mas tylko równanie linii, a nie płaszczyzny. Ponieważ jest to równanie płaszczyzny, każdy inny wierzchołek na płaszczyźnie nieobjętej żadną linią jest niczym innym, jak liniową kombinacją wierzchołków na tych liniach. Jeśli pamiętasz , ze linia jest liniową kombinacją dwóch wierzchołków, prawdopodobnie możesz odgadną , co to wszystko oznacza. W skrócie oznacza to ,że płaszczyzna jest liniową kombinacją dwóch linii . Innym sposobem na to jest wzięcie dwóch długopisów i umieszczenia arkusza papieru tak aby dotykał obu piór we wszystkich punktach. Z tego miejsca, powinno być łatwo zobaczyć każdy wierzchołek, który można wygenerować na tej płaszczyźnie. Poniższy rysunek ilustruje tą koncepcję



Niestety to równanie nie jest byt wygodne, ponieważ zawiera w sumie trzy wierzchołki. Istnieje jednak inne podejście, które możesz zastosować. Informatycy zawsze próbują utrzymać niską redundancję, jak to tylko możliwe, gdy nie jest to wymagane, i jest to dokładnie ta płaszczyzna. Minimalnie można przedstawić równanie z dwoma wektorami i jedną współrzędną (jeden wektor dla t a drugi dla s z P_0 jako kotwicą). To dobry czas ,aby sprawdzić czy naprawdę pamiętasz rzeczy o których uczyłeś się w poprzednich częściach. Jak przekonwertować dwukierunkowe wektory na jedne pojedynczy wektor, który w takim przypadku zawiera tyle informacji? Oczywiście dzięki zastosowaniu iloczynu wektorowego. Jeśli weźmiesz dowolną kartkę papieru, orientacja płaszczyzny jest jednoznacznie identyfikowana przez jej normalny wektor (wektor prostopadły do płaszczyzny). Oczywiście istnieje kilka wektorów, które są równolegle do płaszczyzny, ale jeśli również śledzisz jedną współrzędną, możesz reprezentować płaszczyznę z jednym normalnym wektorem i dowolną współrzędną, która znajduje się na płaszczyźnie, jak pokazano poniżej



A co z równaniem? Cóż, możesz przekształcić swoje równanie parametryczne w funkcję (ale jest to uciążliwe) lub możesz po prostu myśleć nieszablonowo. Ponieważ wektor normalny jest prostopadły do dowolnej linii na twojej płaszczyźnie, wynika z tego ,że pod każdym punktem linii generowanej przez płaszczyznę normalną n, P_0 = <x,y,z,1> :

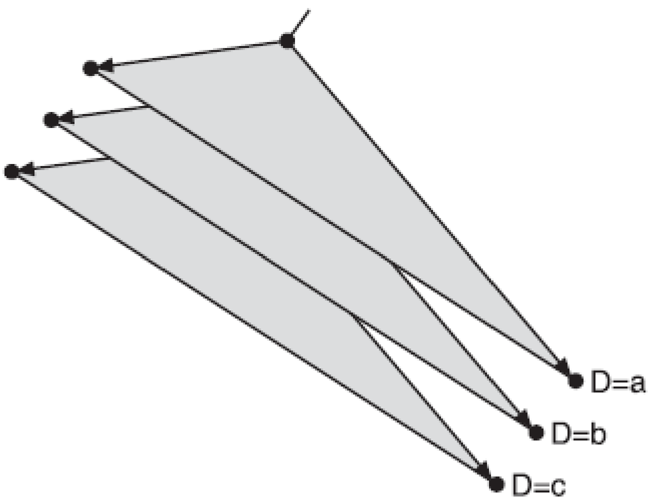
$$\mathbf{n} \bullet (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) = 0$$

Rozwińmy to równanie dla punktu P_1 , o którym wiadomo ,że jest na płaszczyźnie, i powinieneś otrzymać coś bardzo podobnego do poniższego:

$$n_x x + n_y y + n_z z + D = 0$$

$$D = -(n_x p_x + n_y p_y + n_z p_z)$$

Więc co D oznacza geometrycznie? Cóż, jest to podobne do macierzy. Podstawową ideą jest to ,że wartości służy jako forma przesunięcia dla płaszczyzny wzdłuż normalnego wektora, jak pokazano poniżej



Wartość D = 0 oznacza ,że płaszczyzna przechodzi przez punkt początkowy. W rzeczywistości możesz przetestować , że <0,0,0> rzeczywiście spełnia równanie, jeśli D = 0. Zazwyczaj będziesz chciał normalizować wektor normalny po prostu dla tego ,że ułatwia on manipulację płaszczyzną. Gdy jest tak w tym przypadku, wartość D faktycznie wyraża odległość euklidesową (przywołując twierdzenie Pitagorasa) , za pomocą której płaszczyzna jest tłumaczona w kierunku wektora normalnego od początku. W skrócie, każda płaszczyzna może być wyrażona jako wektor <x,y,z, d> - co jest znacznie wygodniejszą reprezentacją niż poprzednio publikowane. Myślący umysł prawdopodobnie zapytałby , co się stanie jeśli zdecydujesz się na zbudowanie równania przy użyciu trzech parametrów zamiast jednego lub dwóch. Dałoby to liniową kombinację trzech wektorów. Jeśli nadal znajdujesz się w świecie 3D, zasadniczo przyglądasz się rozpiętości całego świata (tzn. przestrzeni wektorowej).

Konstruowanie Kul

Kula jest kolejnym bardzo ważnym obiektem geometrycznym, ale zanim spojrzysz na kule, powinieneś najpierw spojrzeć na okręgi. Jak zwykle istnieje kilka różnych podejść, które można zastosować do znalezienia równania dla okręgu. Na przykład możesz pomyśleć o twierdzeniu Pitagorasa. Podejście jakie podejmiemy, odsuwa na bok czysto algebraiczne techniki i spogląda na rzeczy pod innym kątem : przełączając się na współrzędne biegunowe. We współrzędnych biegunowych można łatwo wyrazić okrąg ponieważ można łatwo ustawić zmienną promienia na stałą wartość , podczas gdy kąt wędruje swobodnie. W ten sposób możesz wyrazić równanie koła z równaniem o promieniu r ustalonym na R

r = R

Nie ma absolutnie żadnego ograniczenia kąta, więc możesz pozwolić aby kąt był dowolną wartością i nadal będzie spełniony warunek. Wyciągnijmy algebrę i przekształćmy to równanie na współrzędne kartezjańskie ,a otrzymasz następujące informacje:

$$x = R\cos(\theta)$$
$$y = R\sin(\theta)$$

$$x^2 = R^2\cos^2(\theta)$$
$$y^2 = R^2\sin^2(\theta)$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2\cos^2(\theta) + R^2\sin^2(\theta) \\ &= R^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Normalnie, nie byłby to bardzo interesujący dowód ,ale ten jest interesujący ponieważ przekształca równanie parametryczne w funkcję. Można to zrobić , ponieważ istnieje tylko jedna zmienna, a technika zastosowana tutaj polega po prostu na dodaniu kwadratów dwóch równań razem. Oczywiście można zastosować tę samą koncepcję ustalania promienia do pojedynczej wartości, jednocześnie pozwalając innym zmiennym swobodnie poruszać się w 3D, aby wydedukować równanie kartezjańskie kuli, jak pokazano poniżej

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Innym spojrzeniem na kulę, którą wyraźnie określa równanie, jest to ,że kula jest kształtem, dla którego odległość dowolnego punktu od środka jest stała. Jest to jedynie czyste zastosowanie twierdzenia Pitagorasa w 3D. Jeśli pomyślisz o implikacjach tego we współrzędnych sferycznych, otrzymasz ,że kula o współrzędnych sferycznych po prostu pozostawia promień jako stałą i pozwala kątom swobodnie wędrować. Niestety te dwa kształty okręgu są zawsze wyśrodkowane wokół punktu początkowego.

Kiedy Element Się Zderzają

W pierwszej części przyglądaliśmy się równaniom podstawowym; ta część zbada przecięcia między różnymi elementami podstawowymi. Przecięcia są interesujące w grach nie tylko dla problemu kolizji boolowskich, ale również w celu symulacji różnych ciekawych efektów takich jak dziury po pociskach w ścianie, wgniecenia w powierzchni wielokątnej itd. Zanim jednak zrozumiesz jak można osiągnąć te fajne efekty, najpierw musisz zrozumieć jak obliczyć faktyczną lokalizację przecięcia.

Przecięcie Dwóch Płaszczyzn

Pierwszą rzeczą , o jaką powinieneś zapytać przy pracy z dwoma płaszczyznami, jest to czy się przecinają. Jedyny przypadek kiedy płaszczyzny się nie przecinają występuje wtedy kiedy są równoległe. Oznacza to ,że otrzymasz system liniowy, który nie ma rozwiązania. Tak więc forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & a \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right]$$

Czy to konieczne aby to obliczyć? Nie całkiem. Ponieważ mamy do czynienia tylko z dwoma wektorami, wektor kierunkowy dowolnej płaszczyzny musi być liniową kombinacją z wektorem drugiej płaszczyzny. Jeśli oba wektory są znormalizowane, oznacza to ,że są w rzeczywistości równe. Tak więc, jeśli oba normalne są równe. płaszczyzny się nie przecinają. To naprawdę nudny przypadek, ponieważ nie służy to celowi. Prawdziwym problemem jest sytuacja, w której rzeczywiście istnieje przecięcie. Z uwagi na to, że mamy system nieokreślony (to znaczy masz więcej niewiadomych niż równań), znajdziemy równanie, które opisuje wszystkie możliwe rozwiązania. W przypadku przecinających się dwóch płaszczyzn jest to linia. Możesz użyć metody przedstawionej w części poświęconej macierzom, ale tu przyjmiemy bardziej geometryczne podejście. Jeśli umieścimy dwie niezależne płaszczyzny w przestrzeni i pomyślimy o płaszczyznach w kategoriach ich normalnego wektora, kierunek linii przecięcia jest równoległy do iloczynu wektorowego dwóch normalnych płaszczyzn. Jeśli myślisz o tym w sensie geometrycznym, wszystko ma sens. Teraz mamy kierunek linii, ale wciąż brakuje punktu zaczepienia dla niego. Istnieją sposoby na rozwiązanie tego problemu bez konieczności sprawdzania pewnych warunków wstępnych (takich jak metoda odwrotna Gaussa – Jordana w stosunku do metody wyznacznika), ale wymagana ilość obliczeń czyni je nieatrakcyjnymi. Zamiast tego, po prostu przejdźmy do czystej algebraicznej obserwacji, biorąc pod uwagę dwie płaszczyzny <n_1, d_1> i <$_{n2,}$ d_2> i ich punkt przecięcia x:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{x} &= d_1 \\ \mathbf{n}_2 \bullet \mathbf{x} &= d_2\end{aligned}$$

Istnieje kilka punktów, które spełniają to równanie. Możesz ustawić dowolną wartość na 0 i wyizolować pozostałe komponenty wektora x. Jedyną trudną rzeczną jest to ,że jeśli zdecydujesz się wyzerować komponent x, a linia jest równoległa do osi X, nigdy nie uzyskasz żadnego przecięcia. Zatem wszystko co musisz zrobić, to ustawić jeden komponent na 0 pod warunkiem, że ten sam komponent wektora kierunku jest niezerowy. Reszta tej sztuczki jest zwykłym rozwiązaniem problemów dla dwóch równań i dwóch niewiadomych. To nie jest takie trudne. Ilustruje to :

$$\begin{aligned}\langle 1,2,3\rangle \bullet \mathbf{x} &= 4 \\ \langle 5,1,3\rangle \bullet \mathbf{x} &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Direction &= \langle 1,2,3\rangle \times \langle 5,1,3\rangle \\ &= \langle 3,12,-9\rangle \\ &= \langle 1,4,-3\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y \\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 \\ 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y \\ z=0\end{bmatrix} == \begin{bmatrix}4 \\ 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 \\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 \\ 2\end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ 2\end{bmatrix}$$

Zatem rozwiązaniem jest linia prosta o postaci f(t) = <0,2,0> + <1,4,-3>t. Możesz sprawdzić ,czy ten punkt rzeczywiście występuje na obu płaszczyznach, zastępując go ponownie w równaniach płaszczyzny. W tym przypadku wybraliśmy z jako komponent który ma być unieważniony; było to możliwe ponieważ wektor kierunkowy miał niezerową wartość dla jego składowej z

Przecięcie Trzech Płaszczyzn

Przecięcie trzech płaszczyzn jest problemem, który ma wiele skutków. Na szczęście nie powinno być to dla ciebie nowością , ponieważ znasz już równania płaszczyzny, i wiesz również ,że trzy płaszczyzny tworzą system liniowy. W terminologii matematycznej mamy następujący zestaw równań dla trzech płaszczyzn <n_i, D_i> i dowolnego , nieznanego wektora <v,1> = <x, y,z,1>:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{n}_1, D_1\rangle \bullet \langle \mathbf{v},1\rangle = 0\\ \langle \mathbf{n}_2, D_2\rangle \bullet \langle \mathbf{v},1\rangle = 0\\ \langle \mathbf{n}_3, D_3\rangle \bullet \langle \mathbf{v},1\rangle = 0\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} N_{1x} & N_{1y} & N_{1z} & D_1\\ N_{2x} & N_{2y} & N_{2z} & D_2\\ N_{2x} & N_{2y} & N_{3z} & D_3\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} N_{1x} & N_{1y} & N_{1z}\\ N_{2x} & N_{2y} & N_{2z}\\ N_{2x} & N_{2y} & N_{3z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-D_1\\-D_2\\-D_3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Nv} = \mathbf{d}$$

Może to wygląda bardziej znajomo w tej postaci. Niemniej jedna, jak widzieliśmy wcześniej, system liniowy może mieć wiele rozwiązań, z których wszystkie zależą od rangi macierzy. Geometrycznie jeśli dwa rzędy są liniowo zależne, oznacza to ,że te dwie płaszczyzny są w rzeczywistości równoległe. Można również zauważyć ,że trzy płaszczyzny mogą nie posiadać przecięcia. W tym przypadku dostajesz coś niemożliwego w postaci 4 = 0 ,na przykład. Z części 3 wiesz również ,że rozkład Gaussa-Jordana nie jest idealnie dopasowany do znalezienia rozwiązania tego systemu liniowego. Innym rozwiązaniem z jakim powinieneś się zapoznać jest dekompozycja LU, która w wielu przypadkach może być świetnym narzędziem. W tym przypadku jednak, dla macierzy 3 x 3, istnieje bardziej bezpośrednie rozwiązanie, które jest również stabilne numerycznie. Pomysł przychodzi w najprostszej postaci algebry macierzy, która znasz : odwrotności. Jeśli weźmiemy odwrotności po obu stronach równania, możesz skuteczniej rozwiązać ten problem. W rzeczywistości, metoda Gaussa-Jordana, a w konsekwencji dekompozycja LU, są misternie związane z odwrotnością . Rozwiązanie jakie powinno być widoczne jest czymś wzdłuż tych linii dla macierzy N zbudowanej z normalnych wektorów, wektor v =<x,y,z> i wektora przemieszczenia d:

$$\begin{aligned}\mathbf{Nv} &= \mathbf{d}\\ \mathbf{N}^{-1}\mathbf{Nv} &= \mathbf{N}^{-1}\mathbf{d}\\ \mathbf{v} &= \mathbf{N}^{-1}\mathbf{d}\end{aligned}$$

Powinieneś także wiedzieć ,że metoda Gaussa-Jordana nie jest dobrze dostosowana do obliczania odwrotności macierzy . Rozwiązanie , które zaproponowano w tym punkcie, było obliczenie odwrotności względem wyznaczników. Ta metoda jest znacznie bardziej stabilna liczbowo, w szczególnym przypadku macierzy 3 x 3 oferuje bardzo krótką, słodką i interesującą formuję dla obliczenia przecięcia trzech równań – a , dokładniej, w tym przypadku trzech płaszczyzn. Poniżej przedstawione w jaki sposób można rozwiązań system liniowy dla macierzy 3 x 3:

Bx = a Pierwsza transformacja

Aa = b Druga transformacja

Podstawienie daje co następuje:

ABx = b

Cx = b, C – AB

Ponieważ nie ma dla ciebie znaczenia, czy wektory są wektorami kolumnowymi czy wektorami wierszowymi, możesz całkowicie zapomnieć o transpozycji i stworzyć proste i bezpośrednie równanie aby obliczyć przecięcie trzech płaszczyzn

$$\mathbf{v} = \frac{-D_1(\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3) + D_2(\mathbf{n}_3 \times \mathbf{n}_1) - D_3(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)}{\mathbf{n}_1 \bullet (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3)}$$

Teraz gdy już wszystko widzisz, możesz się zastanawiać, co dokładnie sprawia ,że równanie jest stabilne numerycznie. Odpowiedź na to pytanie nie jest łatwa. Ogólnie rzecz biorąc, równanie jest stabilne liczbowo jeśli nie korzysta z wyniku innego obliczenia. To nie jest twierdzenie, więc niekoniecznie zawsze jest prawdziwe, ale a prawie każdym przypadku tak jest. Dzieję się tak ,że za każdym razem, gdy coś obliczysz, tracisz precyzję. Tak więc, jeśli obliczysz zagnieżdżoną liczbę obliczeń, skończy się gromadzenie błędu do punktu, w którym może powodować fałszywe lub mniej dokładne wyniki. Nie jest to jedyny sposób na utratę stabilności w równaniu. Na przykład, powiedzmy ,że dodajesz dwie liczby. Jeśli jedna liczba jest znacznie większa od drugiej, precyzja będzie poważnym trafieniem. Istnieją dwa realistyczne rozwiązania tego problemu. Pierwszym z nich jest minimalizacja liczby zagnieżdżonych obliczeń a drugim jest wprowadzenie pewnej nadmiarowości do równania w celu ustabilizowania wartości. Gdy obliczasz metodę Gaussa-Jordana, wykonujesz wiele zagnieżdżonych obliczeń ; w ten sposób ta metoda nie jest stabilna numerycznie. Dla porównania, przedstawiona tu metoda odwrotna jest znacznie bardziej stabilna, ponieważ nie zagnieżdża tych wartości w bardzo dużym stopniu. Podczas rozwiązywania układu liniowego za pomocą metody Gaussa i wstecznego zastępowania, tracisz jeszcze większą precyzję z powodu wstecznego zastępowania, która jeszcze bardziej zagnieżdża równania. Rozważmy na przykład poniższe płaszczyzny <1,2,3,4>, <3,2,4,1>,<5,1,1,3>:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \frac{-4(\langle 3,2,4\rangle \times \langle 5,1,1\rangle) + 1(\langle 5,1,1\rangle \times \langle 1,2,3\rangle) + 3(\langle 1,2,3\rangle \times \langle 3,2,4\rangle)}{\langle 1,2,3\rangle \bullet (\langle 3,2,4\rangle \times \langle 5,1,1\rangle)} \\
&= \frac{-4\langle -2,17,4\rangle + 1\langle 1,-14,9\rangle + 3\langle 2,5,-4\rangle}{\langle 1,2,3\rangle \bullet \langle -2,17,4\rangle} \\
&= \frac{\langle 15,-67,-19\rangle}{44} \\
&= \left\langle \frac{201}{22}, -\frac{3593}{43}, -\frac{80}{11} \right\rangle
\end{aligned}$$

Trzy płaszczyzny przecinają się w jednej unikalnej lokalizacji , która tu została obliczona

Przecięcie Linii I Płaszczyzny

Wyobraźcie sobie ,że potężny meteor pędzi w kierunku Ziemi, spadając z niewiarygodną prędkością, ostatecznie lądując na wzgórzu. Niestety nie wiedząc dokładnie , gdzie meteor będzie lądował na płaszczyźnie, nie będziesz w stanie zrobić w sprawie efektów specjalnych, nie mówiąc już o wpłynięciu na teren. Na szczęście ta sekcja powinna pomóc ci rozwiązać ten problem. W rzeczywistości jest to dość trywialny problem. Biorąc pod uwagę równania płaszczyzny i linii , prawie każdy będzie mógł znaleźć miejsce ich przecięcia .Zaprezentujemy sprawy za pomocą wektorów, a tym samym za pomocą gładkie równania. Zasadniczo, dla płaszczyzny ze zmiennym wektorem x i wektorem normalnym n otrzymujemy równanie n*x + D = 0 z linią x = l(t) = p + tv możesz połączyć oba równania i wyizolować t aby uzyskać co następuje:

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{x} + D = 0$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \bullet (\mathbf{p} + t\mathbf{v}) + D &= 0 \\
\mathbf{n} \bullet \mathbf{p} + t(\mathbf{n} \bullet \mathbf{v}) + D &= 0 \\
t(\mathbf{n} \bullet \mathbf{v}) &= -(\mathbf{n} \bullet \mathbf{p} + D) \\
t &= -\frac{(\mathbf{n} \bullet \mathbf{p} + D)}{\mathbf{n} \bullet \mathbf{v}}
\end{aligned}$$

Wysyłamy t z powrotem do równania linii aby otrzymać ostateczne rozwiązanie <x,y,z>, które jest przecięciem linii i płaszczyzny. Teraz widzisz , o ile łatwiej jest reprezentować to równania jako wektory zamiast używać skalarów? Końcowe równanie jest więc następujące:

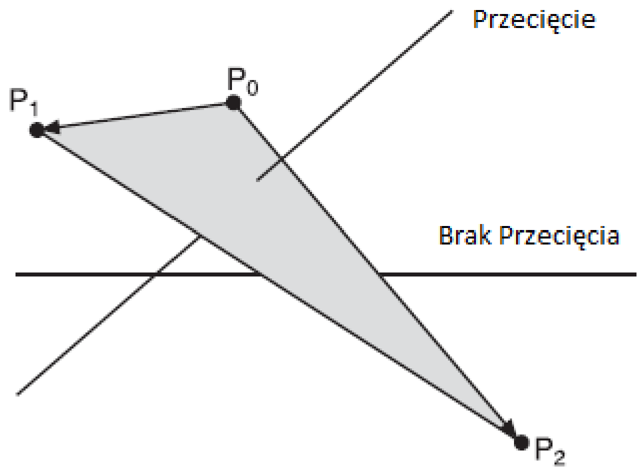
$$\mathbf{x} = \mathbf{p} - \frac{(\mathbf{n} \bullet \mathbf{p} + D)}{\mathbf{n} \bullet \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

W porządku, weźmy przykład. Załóżmy ,że wybierasz płaszczyznę n = <1,2,3> i przemieszczenie D = 4 z linią <1,2,3> + t<1,1,1> :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \langle 1,2,3 \rangle - \frac{(\langle 1,2,3 \rangle \bullet \langle 1,2,3 \rangle + 4)}{\langle 1,2,3 \rangle \bullet \langle 1,1,1 \rangle} \langle 1,1,1 \rangle \\
&= \langle 1,2,3 \rangle - \frac{18}{6} \langle 1,1,1 \rangle \\
&= \langle -2,-1,0 \rangle
\end{aligned}$$

Przecięcie Odcinka Linii I Trójkąta

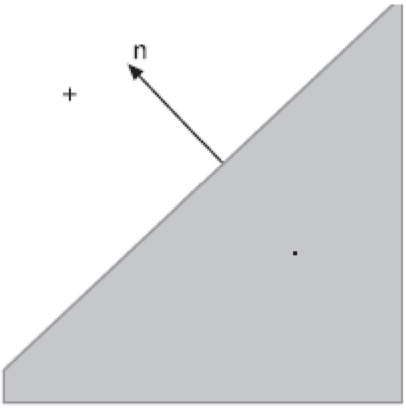
Niektóre sytuacje w programowaniu gier dotyczą linii nieskończonych. Na przykład jeśli planujesz dodać działo kolejowe, możesz rozważyć linię nieskończoną. Jeśli jednak planujesz dodać wyrzutnię rakiet, jest wysoce prawdopodobne, że rakieta nie będzie poruszać się z prędkością pozornie natychmiastową. W tej sytuacji można obliczyć przecięcie trójkąta (ponieważ świat rzadko ma nieskończoną naturę, jak płaszczyzna) i odcinka linii, jak pokazano poniżej, która byłaby ścieżką po której porusza się rakieta



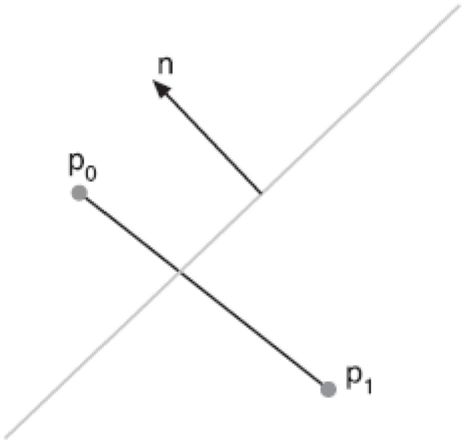
Ten problem jest podobny do linii przecinającej się z płaszczyzną, jak opisano powyżej, ponieważ płaszczyzna może faktycznie być postrzegana jako nieskończony trójkąt, podczas gdy linia może być postrzegana jako nieskończony odcinek linii. Na szczęście można to rozwiązać w dwóch etapach. Najpierw upewnij się ,że linia jest wystarczająco długa, aby mogła przeciąć obie strony trójkąta, po drugie upewnij się że linia znajduje się w granicach trójkąta. Gdy już wiesz , że to prawda, możesz rozważyć trójkąt jako płaszczyznę i obliczyć przecięcie dwóch komponentów, jak zrobiono to poprzednio. W tej części interesuje nas czy istnieje przecięcie ponieważ rzeczywista pozycja przecięcia może być obliczona. Na początek można przybliżać trójkąt z płaszczyzną i sprawdzić czy każdy punkt końcowy odcinka linii znajduje się po inne stronie płaszczyzny. Dzięki temu dowiesz się czy linia jest wystarczająca długa aby przejść przez trójkąt. Problem ogranicza się zatem do określenia strony punktu podanego na płaszczyźnie . (Ten problem jest rzeczywiści prosty i dotyczy wielu innych kształtów) Musisz wyrazić równanie, które masz jako równanie jednorodne – innymi słowy wyrażaj równanie tak aby każda strona równania była równa zeru. Jest to łatwe do wykonania dla płaszczyzny ponieważ jest już jednorodna. W tym momencie oznacz to ,że zero jest punktem zwrotnym dla równania. Tak więc, jeśli podstawienie x w równaniu płaszczyzny daje 0, x jest na płaszczyźnie, ponieważ weryfikuje równość. Jeśli x nie znajduje się na płaszczyźnie, równanie będzie niezerowe. Innym słowy:

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{x} + D = a$$

gdzie a jest skalarem niezerowym. Możesz określić, po której stronie równania znajduje się wierzchołek, patrząc tylko na znak a. Jeśli myślisz o wartości przesunięcia dla D, możesz zauważyć ,ze geometrycznie, a jest wielkością o którą trzeba by przesunąć płaszczyznę tak ,że x jest tej płaszczyźnie. Jeśli a jest dodatnie , musisz iść z jednej strony, jeśli jest ujemne, należy wybrać inny kierunek .Jak pokazano poniżej



dodatnia wartość oznacza ,że wierzchołek leży na połowie, na którą wskazuje wektor normalny równania. Odwrotnie, ujemna wartość oznacza ,że wierzchołek znajduje się na połowie płaszczyzny, która jest przeciwna do wektora normalnego. Jest to coś podobnego co widziałeś w iloczynie wektorowym. Jeśli odwrócisz dwa wektory, zmieni się znak wektora normalnego, to samo można powiedzieć o równaniu jednorodnym. Ogólnie rzecz biorąc, musiałby wykonać wiele obliczeń, aby wiedzieć ,która strona jest dla którego ogólnego kształtu, ale w tym przypadku, nie martwisz się tak naprawdę o stronę, w której znajduje się punkt, tak jak o to , że rezyduje po drugiej stronie pierwszego wierzchołka. Przypomnij sobie ,że w pierwszym kroku chcesz się upewnić ,że segment przechodzi przez płaszczyznę. Ten res kończy się niepowodzeniem, nie może dojść do kolizji między tymi dwoma elementami; potrzebujemy jednego wierzchołka z każdej strony płaszczyzny do pracy jak pokazano poniżej



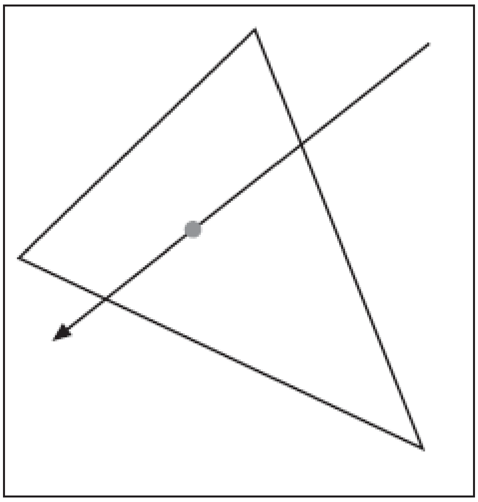
Aby było krótko po prostu szukasz wartości ujemne dla jednego wierzchołka i dodatniej wartości dla drugiego wierzchołka. W konsekwencji równomierne równanie dla płaszczyzny <n,D> i wierzchołka p, które określa stronę

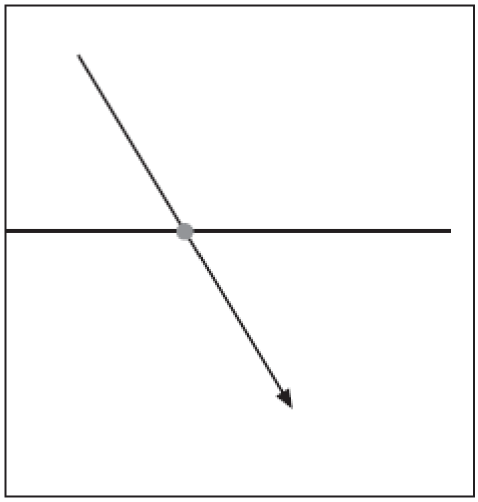
$$f\left(x,y,z\right)=\mathbf{n}\bullet\mathbf{p}+D$$

To równanie należy zastosować dla dwóch punktów końcowych odcinka. Możesz użyć xor w celu rozróżnienia dwóch przypadków. xor zasadniczo wymaga aby oba warunki nie były równe ,aby było prawdziwe. W konsekwencji następujące wyrażenie potwierdza fakt ,że każdy wierzchołek leży po innej stronie płaszczyzny

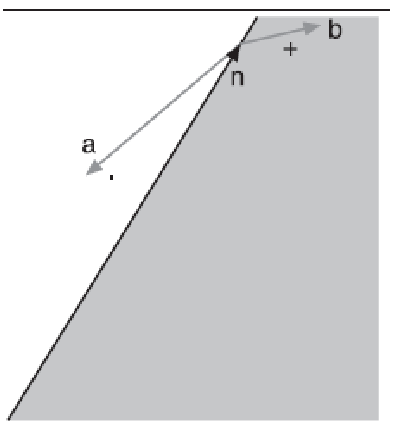
$$\left(\mathbf{n}\bullet\mathbf{p}_0+D>0\right)\mathrm{xor}\left(\mathbf{n}\bullet\mathbf{p}_1+D>0\right)$$

Jeśli ten warunek przejdzie, jesteś w połowie drogi. (Jeśli się nie powiedzie, możesz odrzucić pomysł, że przecięcie w ogóle istnieje, ponieważ błąd oznacza ,że twój odcinek nie jest wystarczająco długi lub jest równoległy do trójkąta). Następnie sprawdzamy ,czy przecięcie linii płaszczyzną faktycznie znajduje się w trójkącie. Aby to zrobić, musimy najpierw obliczyć punkt przecięcia linii z płaszczyzną. Spowoduje to umieszczenie wierzchołka przecięcia na płaszczyźnie trójkąta. To sprawia ,że rzeczy stają się trochę bardziej interesujące, ponieważ sprawia ,że jedna współrzędna jest zbędna. Na przykład, jeśli obrócisz cały świat tak ,że płaszczyzna jest wyrównana do płaszczyzny wygenerowanej przez dwie osie. pozostała trzecia oś jest w rzeczywistości bezużyteczna, ponieważ każdy wierzchołek tego nowego świata będzie miał tą samą wartość dla tego trzeciego komponentu. w rezultacie możesz zapomnieć o dowolnym wybranym komponencie. To nieznacznie zmniejsza złożoność, ponieważ musisz zajmować się tylko dwoma komponentami zamiast trzema. Poniższe rysunki pokazują odwróconą wersję świata, gdzie nie ma potrzeby stosowania komponentu z po obliczeniu przecięcia między płaszczyzną a linią . Każda współrzędna będzie miała taką samą wartość dla z ponieważ znajduje się na tej samej płaszczyźnie.





Powinieneś już wiedzieć jak obliczyć przecięcie linii na płaszczyźnie, więc następnym krokiem jest ustalenie czy wierzchołek znajduje się w trójkącie. Możesz użyć tej samej sztuczki, której użyłeś do określenia strony wierzchołka, obliczając równanie linii, a następnie porównują znak równania z wierzchołkiem, o którym wiesz ,że znajduje się wewnątrz trójkąta (czyli trzeciego wierzchołka, który nie jest używany do znalezienia równania linii). Ta metoda jest wykonalna ale niezbyt bezpośrednia. Zamiast tego możesz użyć iloczynu wektorowego aby osiągnąć to samo. Iloczyn wektorowy może powiedzieć czy wierzchołek jest po jednej stronie linii, czy po drugiej, patrząc na wyznacznik (trzeci komponent) wektora 2D <x,y,1> jak zilustrowano poniżej



Istnieje jeszcze jedna technika, która jest interesująca tylko dla wektorów 2D , z czym masz do czynienia po usunięciu jednego z komponentów .W pozostałej części przyjmiemy założenie ,że składnik został usunięty. Wiesz, że iloczyn wektorowy jest wrażliwy na znak przy π. Innym słowy, przy danym wektorze v można określić stronę, na której znajduje się wierzchołek, obliczając iloczyn wektorowy wygenerowany przez punkt v i przetwarzany wierzchołek aby sprawdzić czy znajdują się one wewnątrz trójkąta. Aby to sprawdzić, wystarczy spojrzeć na znak wyznacznika. Ale zauważyłeś również ,że iloczyn skalarny przynosi podobne właściwości. W tym przypadku, kąt π/2 jest kątem wrażliwym na znak. Iloczyn skalarny jest szybszy dla obliczeń niż iloczyn wektorowy ponieważ wymaga do obliczeń tylko połowy liczby mnożeń. Bardzo szybkim rozwiązaniem jest po prostu obrót wektora o π/2, dzięki czemu można użyć znaku iloczynu skalarnego jako wyznacznika znaku iloczynu wektorowego. W świecie 2D taki obrót jest niezwykle łatwy do zastosowania. Otrzymując wektor <x,y> po obrocie o π/2, wektor staje się <-y,x> . Dzięki temu stosuje się ten sam pomysł co w przypadku iloczynu wektorowego. Możesz wziąć wierzchołek, o którym wiesz ,że leży wewnątrz trójkąta i sprawdzić czy znak jego iloczynu skalarnego z wektorem boku trójkąta obróconego o π/2 pasujące do iloczynu skalarnego wierzchołka który weryfikujesz z wektorem boku obróconym o π/2. Po prostu zastosuj ten proces iteracyjnie do każdego wektora bocznego trójkąta. Jeśli wszystkie testy przejdą, można bezpiecznie powiedzieć, że wierzchołek leży w prostokącie a zatem odcinek przecina trójkąt. Wyrażenie matematyczne dla ostatniego testu jest następujące dla trójkąta z wierzchołkami {a,b,c} i z wierzchołkiem v gdzie wykładnik z S faktycznie oznacza obrót o π/2 dla danego wektora

$$\left((\mathbf{a}-\mathbf{b})^{S} \bullet \mathbf{c} > 0\right) \operatorname{xor} \left((\mathbf{a}\text{-}\mathbf{b})^{S} \bullet \mathbf{v} > 0\right)$$
$$\left((\mathbf{b}-\mathbf{c})^{S} \bullet \mathbf{a} > 0\right) \operatorname{xor} \left((\mathbf{b}\text{-}\mathbf{c})^{S} \bullet \mathbf{v} > 0\right)$$
$$\left((\mathbf{c}-\mathbf{a})^{S} \bullet \mathbf{b} > 0\right) \operatorname{xor} \left((\mathbf{c}\text{-}\mathbf{a})^{S} \bullet \mathbf{v} > 0\right)$$

Weź trójkąt z wierzchołkami <-3, -3, 1>, <3,-3,-1>, <-3,3,0> i linię z punktami końcowymi <0,5,0> i <1,-6,0>. Można sprawdzić czy wektor normalny dla tego trójkąta wynosi <-12, -6, -36, -18> a przecięcie na płaszczyźnie wynosi <8, -43, 0> / 9. Biorąc pod uwagę v ,możesz obliczyć czy w trójkącie istnieje przecięcie. Ponieważ jesteś zainteresowany jedynie znakiem obliczeń, może pomnożyć każdą stronę równania , która przenosi v przez 9 , abyś mógł pozbyć się brzydkich ułamków:

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(\langle -3,-3\rangle - \langle 3,-3\rangle\right)^{S} \bullet \langle -3,3\rangle > 0\right) \mathrm{xor} \left(\left(\langle -3,-3\rangle - \langle 3,-3\rangle\right)^{S} \bullet \langle 8,-43\rangle > 0\right) \\
&= \left(\langle 0,-6\rangle \bullet \langle -3,3\rangle > 0\right) \mathrm{xor} \left(\langle 0,-6\rangle \bullet \langle 8,-43\rangle > 0\right) \\
&= \left(-18 > 0\right) \mathrm{xor} \left(258 > 0\right) \\
&= 0 \mathrm{xor} 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(\langle 3,-3\rangle - \langle -3,3\rangle\right)^{S} \bullet \langle -3,-3\rangle > 0\right) \mathrm{xor} \left(\left(\langle 3,-3\rangle - \langle -3,3\rangle\right)^{S} \bullet \langle 8,-43\rangle > 0\right) \\
&= \left(\langle 6,6\rangle \bullet \langle -3,-3\rangle > 0\right) \mathrm{xor} \left(\langle 6,6\rangle \bullet \langle 8,-43\rangle > 0\right) \\
&= \left(-32 > 0\right) \mathrm{xor} \left(-210 > 0\right) \\
&= 0 \mathrm{xor} 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(\langle -3,3\rangle - \langle -3,-3\rangle\right)^{S} \bullet \langle -3,-3\rangle > 0\right) \mathrm{xor} \left(\left(\langle -3,3\rangle - \langle -3,-3\rangle\right)^{S} \bullet \langle 8,-43\rangle > 0\right) \\
&= \left(\langle 0,6\rangle \bullet \langle -3,-3\rangle > 0\right) \mathrm{xor} \left(\langle 0,6\rangle \bullet \langle 8,-43\rangle > 0\right) \\
&= \left(-18 > 0\right) \mathrm{xor} \left(-258 > 0\right) \\
&= 0 \mathrm{xor} 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Łatwo można było zatrzymać się w drugim kroku gdy uzyskaliśmy wynik 0. Wydaje się, że przechodzi tylko jeden test, co oznacza ,że wierzchołek znajduje się „na środku” połowy pojedynczej linii. Dla dwóch pozostałych linii jest na zewnątrz. Powinieneś zawsze uzyskać co najmniej jedną cyfrę 1, ponieważ niezależnie od tego jak umieścisz swój wierzchołek, zawsze powinieneś być „na dobrej połowie” co najmniej jednej linii. Należy zauważyć ,że w tym konkretnym przypadku było oczywiste, że wierzchołek nie znajdował się wewnątrz trójkąta tylko dlatego ,że jego druga współrzędna y była poza obrębem, któregokolwiek z pozostałych punktów. Innymi słowy -43/9 < -3 , co jest najniższym punktem trójkąta.

Przecięcie Między Polem A Odcinkiem Linii.

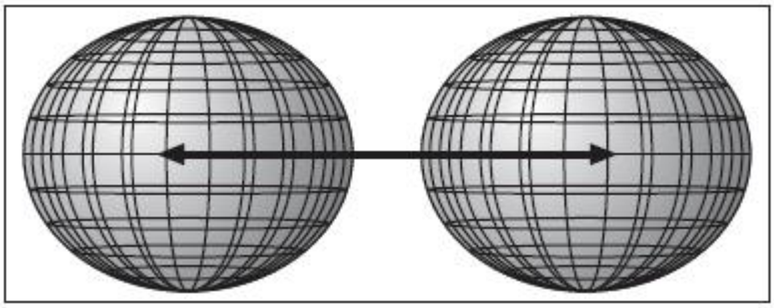
Jak zobaczysz później, wygodniej jest reprezentować grupę obiektów jako pole, więc bardzo ważne jest aby spojrzeć na przecięcie między odcinkiem linii a polem.. W tym przypadku zakładamy ,że pole jest wyrównane względem osi, co oznacza ,że pole ma wyłącznie zakres <x,y,z> <[a,b],[c,d], [e,f> . Nie ma tu nic szczególnie trudnego, ponieważ prawdą jest ,że już znasz wszystkie materiały aby to osiągnąć. Krótko mówiąc, wiesz jak sprawdzi czy odcinek linii jest wystarczająco aby przejść przez płaszczyznę. Tutaj możesz być bardziej optymalny i po prostu upewnić się ,że komponent odpowiadający płaszczyźnie pasuje do zakresu. Na przykład, jeśli masz płaszczyznę zdefiniowaną prze x = 3 (to znaczy, płaszczyzna dla której x jest zawsze równe 3 i gdzie z i y nie mają żadnych ograniczeń) z odcinkiem linii <4,5,6> i <7,8,9>, jest jasne ,że linia nie przechodzi przez płaszczyznę. ponieważ x jest mniejsze niż 3. Jeśli więc płaszczyzna kończy się jako lewa płaszczyzna (z największą wartością x), nie będzie żadnych przecięć. Możesz zastosować podobny proces do pozostałych pięciu płaszczyzn. Kolejnym krokiem ,jak wspominaliśmy wcześniej, jest obliczenie przecięcia linii i tej płaszczyzny. Ponownie, powinieneś skorzystać z faktu, że płaszczyzna jest wyrównana względem osi w twoich obliczeniach, aby równanie było nieco łatwiejsze do wyliczenia. Po znalezieniu punktu przecięcia, po prostu sprawdzasz , czy punkt pasuje do domeny zdefiniowanej przez pole <[a,b],[c,d],[e,f]>,.

Poznaj Odległości

Znajomość równań różnych kształtów jest dobrą rzeczą, ale ważne jest równie poznanie kilku ich właściwości. W tej sekcji skoncentrujemy się głównie na obliczaniu minimalnej przestrzeni między dwoma kształtami. Ten rodzaj informacji stanie niezwykle przydatny, gdy przyjdzie czas aby ustalić czy zderzyły się dwa obiekty.

Określenie Odległości Między Dwoma Kulami

Obliczenie odległości między dwoma kulami



jest reczywiście niezwykle proste. Zacznijmy od rozważenia kul jako dwóch wierzchołków, które już wiesz jak wyliczyć odległość między nimi. Jest to proste zastosowanie twierdzenia Pitagorasa, kiedy znasz długości (delty) dla każdej współrzędnej:

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Ta wartość d, faktycznie reprezentuje długość wyimaginowanej linii biegnącej od środka pierwszej kuli do środka drugiej kuli . Jeśli zapomnisz o wszystkim wokół tej przestrzeni i rozważysz tylko to ,co znajduje się w pobliżu tej linii, zauważysz , że dwie kule przecinają tę linię. Dokładnie przecinają linię na długości równej ich promieniu od ich odpowiednich punktów końcowych ; jest to zgodne z definicją kuli (wszystkie wierzchołki znajdują się równej odległości od środka). Jeśli masz dwie kule o promieniu r_1 i r_2 dla których środki są oddzielone przez d, odległość która oddziela je to:

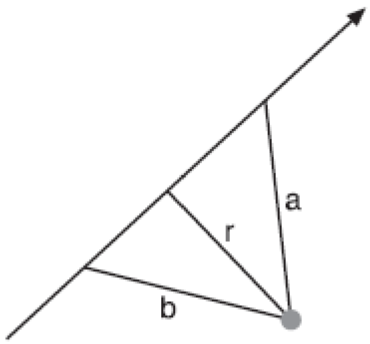
$D = d - r_1 - r_2$

Teraz gdy rozumiesz w jaki sposób kula odnosi się do wierzchołka, możesz rozważyć kulę jako wierzchołek dla wszystkich pozostałych problemów, o ile nie zapomniesz odjąć promienia kuli od odległości. W rzeczywistości, jeśli chcesz być dokładny matematycznie, możesz zdefiniować wierzchołek jako kulę o nieskończenie małym promieniu, lub kule o promieniu która dąży do zera. Na przykład rozważmy dwie kule wyśrodkowane przy <0,0,0> i <3,4,5> o promieniach 1 i 2. Odległość między nimi jest określona przez :

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} - 1 - 2 \\ &= \sqrt{50} - 1 - 2 \\ &= 4.0710 \end{aligned}$$

Określanie Odległości Między Wierzchołkiem A Linią

Obliczanie odległości między linią i punktem nie jest tak proste, jak obliczanie odległości między dwoma kulami. W rzeczywistości nawet mówienie, że chcesz obliczyć odległość między wierzchołkiem a linią jest raczej nieprecyzyjne .To co naprawdę cię interesuje, to obliczanie najkrótszej odległości między wierzchołkiem a linią. Można obliczyć nieskończoną liczbę odległości od linii p + tl a wierzchołkiem v , ponieważ istnieje nieskończona liczba punktów na linii. Najkrótsza linia wyobrażeniowa, jaką możesz utworzyć między linią a jakimkolwiek innym obiektem, jest prostopadła do drugiej linii, jak poniżej



Ponieważ ta linia wyobrażeniowa jest prostopadła do drugiej linii, możesz ustanowić relację trójkąta z dowolnym punktem na oryginalnej linii, aby użyć twierdzenia Pitagorasa, by w końcu znaleźć odległość d. Wynika co następuje:

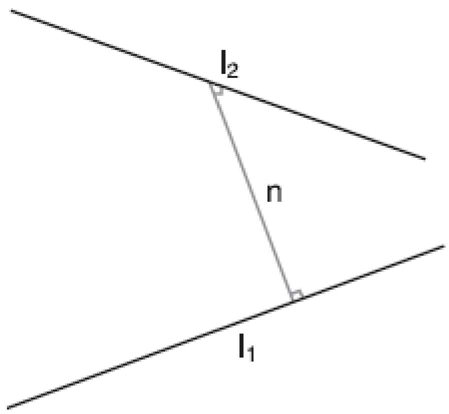
$$d^2 = \left\|(\mathbf{v}-\mathbf{p})\right\|_2^2 - \mathrm{proj}_{\mathbf{l}}^{\,2}(\mathbf{v}-\mathbf{p})$$
$$= \left(\sqrt{(v_x-p_x)^2+(v_y-p_y)^2+(v_z-p_z)^2}\right)^2 - \frac{((\mathbf{v}-\mathbf{p})\bullet\mathbf{l})^2}{\|\mathbf{l}\|_2^2}$$
$$d = \sqrt{(v_x-p_x)^2+(v_y-p_y)^2+(v_z-p_z)^2-\frac{((\mathbf{v}-\mathbf{p})\bullet\mathbf{l})^2}{\|\mathbf{l}\|_2^2}}$$

Oczywiście jeśli planujesz dokonać porównania z odległością, sprawdź czy nie możesz porównać z kwadratem odległości. Pozwoli ci to zaoszczędzić kosztownej obliczeniowo funkcji. Jest to w istocie niezły dowód na to ,jak wykorzystać koncepcję wektora. Nie jest to skomplikowany dowód: wystarczy pomyśleć o związku między wektorem a elementami we wszechświecie. Zatem biorąc pod uwagę linię <1,2,3> + t<1,1,1> i punkt w przestrzeni <4,2,1>, możesz obliczyć najkrótszą odległość między linią a punktem jak poniżej:

$$
\begin{aligned}
d &= \sqrt{\left\|\langle 4,2,1\rangle-\langle 1,2,3\rangle\right\|_2^2-\frac{\left(\langle 4,2,1\rangle-\langle 1,2,3\rangle\right)\bullet\langle 1,1,1\rangle}{\left\|\langle 1,1,1\rangle\right\|_2^2}} \\
&= \sqrt{\left\|\langle 3,0,-2\rangle\right\|_2^2-\frac{\langle 3,0,-2\rangle\bullet\langle 1,1,1\rangle}{\left\|\langle 1,1,1\rangle\right\|_2^2}} \\
&= \sqrt{13-\frac{1}{3}} \\
&= \sqrt{\frac{38}{3}}
\end{aligned}
$$

Odległości Między Dwoma Liniami

Wyobraź sobie ,że masz dwa obiekty, z których każdy porusza się po swojej ścieżce liniowej. Czy przecinają się? To brzmi jak problem z odległością między liniami! Ustalenie minimalnej odległości pomiędzy dwoma liniami łączy się problemem minimalnej odległości linia/wierzchołek. Linia może w rzeczywistości być traktowana jako nieskończony zbiór punktów, gdzie relacja między każdym punktem jest kombinacją liniową. Co to oznacza dla ciebie, to że możesz faktycznie uznać jedną z linii za nieskończony zbiór punktów. A by to zilustrować, weź dwie linie l_1 i l_2 . Wiadomo , że można obliczyć minimalną odległość między linią a punktem, po prostu wymuszając wektor odległości będącego ortogonalnym względem linii i przechodzącego przez punkt. Podobnie jeśli zrobisz to dla obu linii, możesz wywnioskować że wektor odległości, który oddziela każdą linię, jest w rzeczywistości prostopadły do l_1 i l_2. Ale jak właściwie wygenerować wektor , który jest prostopadły do obu linii, jak pokazano poniżej



Jeśli nie znasz odpowiedzi, rozważ powrót do Części II. Jeśli znasz odpowiedź, musisz wiedzieć ,że mówimy o iloczynie wektorowym. W ten właśnie sposób można uzyskać wektor kierunkowy linii. W tym momencie masz dobry pomysł na równanie odległości linii ,ale nadal potrębujesz punktu kontrolnego, który ustala linię do danej pozycji. Jeśli wektor kierunkowy wektora odległości jest znormalizowany, a punkt kontrolny równania znajduje się na jednej z dwóch linii, parametr ten będzie reprezentował odległość euklidesową (wzdłuż wektora), jeśli równanie będzie równe punktowi z drugiej strony linia równania. Matematycznie to , na co patrzysz, jest następujące dla dwóch linii f(s) i g(t) każda z kierunkowym wektorem DeltaG i DeltaG oraz z punktami zakotwiczenia F i G

$$\mathbf{f}(s) = \mathbf{f} + s(\Delta\mathbf{f})$$
$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{g} + t(\Delta\mathbf{g})$$

$$\mathbf{n}(x) = \mathbf{n} + x(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})$$
$$\mathbf{f} + s(\Delta\mathbf{f}) = \mathbf{g} + t(\Delta\mathbf{g}) + x\frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2}$$
$$\mathbf{f} - \mathbf{g} = t(\Delta\mathbf{g}) - s(\Delta\mathbf{f}) + x\frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2}$$

$$\begin{bmatrix} f_x - g_x \\ f_y - g_y \\ f_z - g_z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} \Delta g_x \\ \Delta g_y \\ \Delta g_z \end{bmatrix} - s\begin{bmatrix} \Delta f_x \\ \Delta f_y \\ \Delta f_z \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_x}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} \\ \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_y}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} \\ \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_z}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{(\Delta f\times\Delta g)_x}{\|\Delta f\times\Delta g\|_2} & \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_y}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} & \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_z}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_x - g_x \\ f_y - g_y \\ f_z - g_z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_x}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} & \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_y}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} & \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_z}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta g_x \\ \Delta g_y \\ \Delta g_z \end{bmatrix}$$
$$-s\begin{bmatrix} \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_x}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} & \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_y}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} & \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_z}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta f_x \\ \Delta f_y \\ \Delta f_z \end{bmatrix} +$$

$$x\begin{bmatrix} \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_x}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} & \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_y}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} & \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_z}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_x}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} \\ \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_y}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} \\ \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_z}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_x}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} & \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_y}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} & \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_z}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_x - g_x \\ f_y - g_y \\ f_z - g_z \end{bmatrix} = [0]t - [0]s + x[1]$$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_x}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} \\ \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_y}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} \\ \frac{(\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g})_z}{\|\Delta\mathbf{f}\times\Delta\mathbf{g}\|_2} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} f_x - g_x \\ f_y - g_y \\ f_z - g_z \end{bmatrix}$$

Ten dowód jest doskonałym przykładem tego , jak bardzo ważne jest zrozumienie poprzednich zasad; w przeciwnym razie może się okazać , że komputer oblicza wiele rzeczy, które w rzeczywistości są stałe. Ważny w tym dowodzie jest fakt ,że oryginalne wektory delatF i deltaG są prostopadłe do wektora normalnego wygenerowanego przez oba z nich. W konsekwencji iloczyn wektorowy dowolnego z tych dwóch wektorów pomnożony przez iloczyn wektorowy będzie równy zero

$$\Delta f \times \Delta g = \langle 1,1,1 \rangle \times \langle 1,2,3 \rangle$$
$$= \langle 1,-2,1 \rangle$$

$$\|\Delta f \times \Delta g\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^1}$$
$$= \sqrt{6}$$

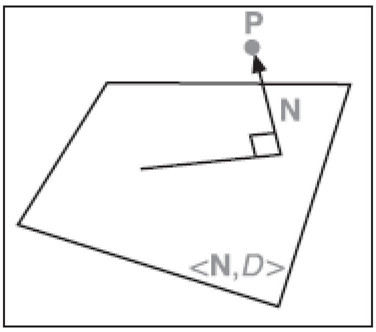
$$F - G = \langle 1,2,3 \rangle - \langle 1,1,1 \rangle$$
$$= \langle 0,1,2 \rangle$$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$= 0$$

Ojej, co tu się stało? Właściwe jest to poprawne. Oznacza to ,że dwie linie faktycznie przecinają się. Innymi słowy , najkrótsza odległość między nimi to 0. Możesz sprawdzić czy rzeczywiście tak jest, zastępując t = -1 i s = 1.

Określenie Odległości Między Punktem A Płaszczyzną

Metody obliczania odległości nie zawsze muszą być skomplikowane lub czysto algebraiczne. Jeśli jesteś skłonny do wizualnej pracy, łatwiejsze będzie rozwiązanie problemu geometrycznie , jak poniżej



Widziałeś już ,że można wyrazi równanie płaszczyzny za pomocą jej wektora normalnego i wartości D, która reprezentuje odległość płaszczyzny od początku wzdłuż wektora normalnego. Kluczem do rozwiązania tego problemu jest D. Jeśli masz znormalizowaną płaszczyznę , D staje się odległością euklidesową między początkiem a płaszczyzną. Jeśli przetłumaczysz wszystko tak ,że punkt początkowy jest punktem od którego zaczynasz, D rzeczywiście będzie równe najkrótszej odległości między płaszczyzną a punktem początkowym (który będzie wtedy wierzchołkiem, według tej hipotezy).

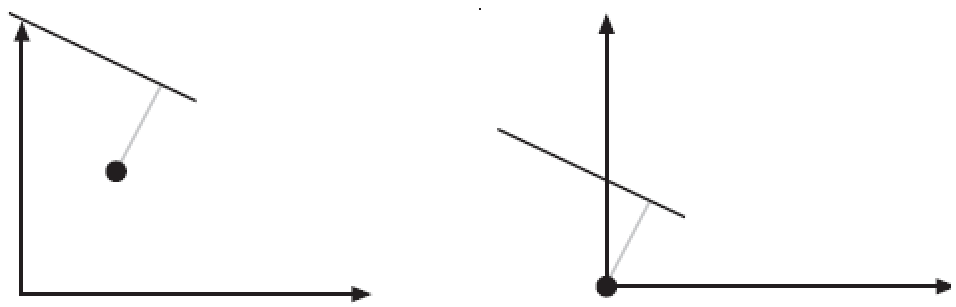
Normalizacja płaszczyzny jest łatwym zadaniem. Wiesz jak normalizować wektor, prawda? Przypomnijmy, że wystarczy podzielić każdy komponent przez 2-normę wektora. Jest to nieco inne dla płaszczyzny, ponieważ mamy dodatkowy komponent D. Poprzednio wspomniano ,że płaszczyzna musiałaby być znormalizowana , aby D reprezentowała odległość między początkiem a płaszczyzną. Oznacza to ,że całe równanie trzeba podzielić przez długość wektora normalnego. Dlatego nie powinniśmy liczyć D jako części tego procesu normalizacji. To prawda ,że reprezentuje płaszczyznę jako wektor 4D gdzie czwartym komponentem jest D, ale zasada jest taka ,że prostopadła musi mieć długość 1 a nie to ,że wektor płaszczyzny, w tym D musi mieć długość 1 (znormalizowana). W konsekwencji jeśli chcesz znormalizować płaszczyznę, powinieneś przestrzegać następującego równania dla wektora n = $<N_x,N_y,N_z,D>$:

$$\frac{N_x x + N_y y + N_z z + D}{\sqrt{N_x{}^2 + N_y{}^2 + N_z{}^2}} = 0$$

Teraz chciałbyś przetłumaczyć świat, tak aby pochodzenie stało się pozycją wierzchołka. Czym więc jest równanie f(x,y,z) które pobierze świat i przetłumaczy go na wierzchołek? Poniższe proste równanie rozwiązuje problem:

0 + P = P

Wszystko co musisz zrobić , to dodać punkt do wszystkich zmiennych <x,y,z> (i innych punktów), jak pokazano poniżej



Dla każdego punktu <x,y,z> powinieneś obliczyć <x [ps] p_x, y [ps] p_y, z-[ps] p_z>. Wszystko co musisz zrobić w to dodać wierzchołek P z każdego innego punktu/zmiennej ,a będziesz w stanie uzyskać odległość między punktem a płaszczyzną, po prostu izolując dla D. Zakładając ,że wektor n jest już znormalizowany, wynika następująca logika:

$$N_x\left(x+P_x\right)+N_y\left(y+P_y\right)+N_z\left(z+P_z\right)+D=0$$
$$N_x x+N_y y+N_z z+\left(D+N_x P_x+N_y P_y+N_z P_z\right)=0$$
$$\mathbf{n}\bullet\langle x,y,z\rangle+\left(D+\mathbf{n}\bullet P\right)=0$$
$$\mathbf{n}\bullet\langle x,y,z\rangle+d=0$$

Łączymy wszystkie terminy, aby obliczyć ostateczną wartość dla d, odległość między wierzchołkiem p i płaszczyzną:

d = D + n * p

Rozważmy płaszczyznę <1,2,3> i punkt <3,2,1>. Obliczmy najmniejszą odległość między dwoma elementami (nie zapomnij o normalizacji):

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{4 + \langle 1,2,3 \rangle \bullet \langle 3,2,1 \rangle}{\left\| \langle 1,2,3 \rangle \right\|_2} \\
&= \frac{4+3+4+3}{\sqrt{14}} \\
&= \frac{21}{\sqrt{14}}
\end{aligned}
$$

Format Plików 3D

Wreszcie przyjrzymy się ogólnej strukturze formatu pliku 3D. Niestety, nie jest zbyt użyteczne przechodzenie przez jeden określony format, ponieważ większość zawiera wiele szczegółów na które warto spojrzeć. Ponadto istnieje mnóstwo darmowych modeli obiektów ładujących, które można pobrać i użyć w swoim kodzie źródłowym, co czyni je całkiem bezużytecznym do przepisania tutaj. Warto zwrócić uwagę na ogólną strukturę , którą stosują ponieważ najlepiej sprawdza się tworzenie własnego formatu plików, który jest bardziej dostosowany do twoich potrzeb. Na przykład może być konieczne zachowanie dodatkowych informacji dla każdego wierzchołka. Typowy format pliku modelu ma następujące właściwości :

- Lista wierzchołków. Niektóre formaty wolą podawać każdy szczegół o wierzchołku, podczas gdy inni wolą budować jedną , dużą tablicę wierzchołków, do których później się odwołamy
- Tablica współrzędnych tekstury. Dwie powszechne implementacje mają udzielić tych informacji zaraz po wierzchołku lub po prostu mieć jedną , dużą tablicę, która zostanie później zindeksowana.
- Element normalny. Normalny staje się niezwykle przydatny, gdy przychodzi czas podjęcia decyzji czy wielokąt jest widoczny, czy też nadszedł czas ,aby rendereować wielokąt oświetleniem
- Tablica trójkątów. Większość modeli składa się z trójkątów, które są najprostszą formą wieloboku 3D. W rezultacie użycie trójkątów powoduje wykonanie wszystkich obliczeń. Weźmy, na przykład, przecięcie pięciokąta z odcinkiem; powinieneś wyraźnie zobaczyć ile więcej obliczeń będzie wymagało aby to ustalić, w porównaniu do określenia przecięcia trójkąta z odcinkiem. Dla uproszczenia typowy obiekt składa się grupy trójkątów, a większość modeli plików opisuje te trójkąty włączając trzy wierzchołki. Zasadniczo łatwiej jest po prostu użyć przesunięcia wierzchołka, ale niektóre formaty plików wolą przypisać indeks do tablicy wierzchołków, tablicy tekstur i normalnej tablicy oddzielnie, po prostu dlatego ,że mogą ponownie użyć niektórych wartości. Na przykład załóżmy, że masz wierzchołek współdzielony przez dwa trójkąty; mogą mieć różne współrzędne tekstury, jeśli jeden trójkąt jest ramieniem postaci ,podczas gdy drugi jest częścią jego koszulki. Wygodne może być nanoszenie normalnego trójkąta. W ten sposób nie musisz przeliczać wartości normalnej za każdym razem, gdy chcesz zrobić coś podobnego do przecięcia linii i trójkąta. Jest to coś, o czym należy pamiętać podczas tworzenia własnego formatu
- Tablica grup trójkątów. Niektóre formaty plików również lubią budować grupy. Na przykład, możesz chcieć zgrupować wszystkie trójkąty , które składają się na głowę, oddzielając te , które mają do czynienia z ramieniem. W ten sposób łatwiej rozpoznać czy działo kolejowe trafiło w

głowę lub ramię. To także sprawia ,że łatwiej poruszać głową niezależnie od reszty ciała postaci, ponieważ każdy trójkąt związany z głową jest zgrupowany razem. Ogólnie mówiąc, jeśli używasz formatu pliku, będziesz musiał również przechowywać wszystko w pamięci; najlepszym sposobem na to jest tworzenie tablic o odniesienie do obiektów poprzez wskaźniki Tak się składa ,że doskonale nadaje się do list wierzchołków i podobnych zaawansowanych koncepcji , które udostępniają interfejsy API 3D

Podsumowując, ogólny format danych do przechowywania modeli polega na przechowywaniu pięciu tablic : jedna tablica dla wierzchołka, jedna tablica współrzędnych tekstur, jedna dla wektorów normalnych, jedną z trójkątami i jedną z grupą trójkątów. Trójkąty będą zazwyczaj indeksować wierzchołki, tekstury i normalne, podczas gdy grupa będzie indeksować trójkąty. Jak zawsze, bądź sprytny w swoich strukturach danych.