V. Transformacje

Wszyscy przechodzą okres dojrzewania; dlaczego twoje obiekty powinny być wyłączone z transformacji? To może brzmieć jak głupie pytanie, ale jest poważne. Statyczny obiekt jest nudny. Aby ożywić którąś z twoich scen, musisz zmusić ich do zmutowania lub przemiany choć odrobinę. Oczywiście, gdy osoba przechodzi przez okres dojrzewania płciowego, nie zmienia się z mężczyzny na kobietę lub odwrotnie (chyba, że chodzi o jakiś rodzaj operacji), a obiekty nie różnią się od siebie. Podczas transformacji nadal powinny być rozpoznawalne . Mogą rosnąć, kurczyć się, rozciągać, a nawet pęcznieć w pewnych obszarach, ale związki między różnymi częściami powinny pozostać. Innymi słowy, tak jak twoja głowa nie zamienia się miejscami z twoimi nogami (znowu, jeśli jakiś rodzaj operacji nie jest zaangażowany), twoje obiekty powinny pozostać względnie nienaruszone.

W tej sekcji omówimy zajmiemy się ogólnymi aspektami transformacji i otaczającymi je komponentami. Dokładniej przyjrzymy się następującym zagadnieniom:

■ Punkt widzenia

■ Transformacje liniowe, takie jak tłumaczenia, skalowanie, pochylenie i obroty

■ Transformacje wielowierszowe, w tym obroty wokół dowolnej osi

■ Projekcje 3D

■ Transformacja nieliniowa

Wszystko zależy od punktu widzenia

Jest rok 3000 i planujesz następny atak na zdalny układ słoneczny. Stacje kosmiczne są zjawiskiem powszechnym, a wiele z nich swobodnie się obraca wokół macierzyńskiej planety. Zamiast obliczać wiele transformacji, aby pokazać obrót stacji kosmicznej wokół dowolnej osi, trik polega na tym, aby zastosować każdy z nich raz, a następnie przechować. Na przykład, jeśli wcześniej obrócono stację kosmiczną, tak że jej oś obrotu była już wyrównana z osią Z, wystarczy obrócić wokół osi Z i zastosować odwrotne obroty, które ustawiają wektor obrotu wróć do swojej pierwotnej pozycji. To jest idea tworzenia różnych przestrzeni. Projektując grę, należy przechowywać / ładować obiekty w najbardziej dogodnej przestrzeni dla swoich potrzeb. Czasami może to po prostu oznaczać tłumaczenie obiektu o określoną wartość lub, jak w przypadku stacji kosmicznej, może to oznaczać zastosowanie do niego wstępnej rotacji. Chociaż można łatwo tworzyć własne przestrzenie, kilka z nich, omówionych tutaj, jest dość powszechnych. Warto zauważyć, że masz punkt widzenia obiektu, świat jako pojemnik obiektów, a na końcu aparat, który jest twoim okiem na świat. Zanim zaczniesz studiować rdzeń transformacji, najpierw przyjrzyjmy się zawartości, w której można je zastosować. Innymi słowy, spójrzmy na punkty widzenia, które możesz zrobić, aby przekształcić swoje obiekty: przestrzeń obiektu, przestrzeń światową i przestrzeń kamery.

Przestrzeń Obiektu

Jakiś czas temu wielu uczonych religijnych, filozofów i naukowców wyobrażało sobie ideę geocentrycznego układu planetarnego - to znaczy układu słonecznego, w którym Ziemia jest centrum wszystkiego, a także systemu, w którym każdy obiekt obraca się wokół Ziemi. Naukowcy dnia opracowali zestaw skomplikowanych równań, aby opisać ich zrozumienie ruchu planet w kosmosie. Z czasem naukowcy udowodnili, że teoria geocentryczna, rozwinięta przez Kościół chrześcijański, była błędna i że w rzeczywistości słońce było centrum naszego układu słonecznego. To znaczy, zamiast być geocentrycznym, nasz system planetarny był heliocentryczny. Biorąc pod uwagę tę nową optykę, ruch planet wokół naszego punktu widzenia był drastycznie łatwiejszy do zauważenia. Nie oznacza to wcale, że nie można opisać ruchu innych planet z heliocentrycznego punktu widzenia; oznacza to po prostu, że o wiele trudniej jest myśleć o ruchu z naszego punktu widzenia niż z punktu widzenia Słońca. O to właśnie chodzi w tej sekcji: wybór odpowiedniego punktu widzenia, aby wyrazić swoje przemiany w najbardziej naturalny sposób. W przestrzeni obiektu najbardziej interesuje cię punkt widzenia obiektu, stąd określenie "przestrzeń obiektu". Środek przestrzeni znajduje się w środku obiektu. (Środek obiektu nie musi być prawdziwym środkiem obiektu, powinien być tym, co uważasz za środek z punktu widzenia obiektu.) Używanie tego punktu widzenia jest niezwykle przydatne podczas obracania obiektu o swoją lub o dowolną oś. W przestrzeni obiektu patrzysz na świat z punktu widzenia obiektu. Umożliwia to zdefiniowanie unikatowej transformacji dla każdego obiektu, który jest łatwy do obliczenia, na przykład obrót obiektu wokół siebie. Po prostu spróbuj sobie wyobrazić opis ruchu księżyca wokół Ziemi jako obrót i tłumaczenie wokół Słońca; zrozumiesz, co rozumiem przez prostotę. Zatem wszystkie współrzędne podane w przestrzeni obiektu opisują obiekt bez uwzględniania jego obrotów, tłumaczeń lub czegokolwiek pomiędzy. Transformacje te są stosowane z innego punktu widzenia. Na Ziemi tak naprawdę nie ma znaczenia, że Ziemia się obraca, a teraz to robi? Jest to prawdą, jeśli bierze się pod uwagę tylko Ziemię, nie myśląc o otaczającym ją słońcu i księżycu. Macierz transformacji, która jest stosowana do współrzędnych w przestrzeni obiektu, nazywana jest macierzą transformacji obiektu. W konsekwencji obrót stacji kosmicznej wokół dowolnej osi byłby rzeczywiście uważany za przekształcenie przestrzeni obiektowej. Jeśli chciałbyś wykonać wstępny obliczenia pierwszego obrotu tak, aby wektor obrotu był wyrównany z osią Z, musiałbyś utworzyć drugą przestrzeń obiektu (więcej o tym później). Tak więc fakt, że Ziemia się obraca, jest tutaj przedstawiony w macierzy transformacji przestrzeni obiektowej.

Przestrzeń Świata

Zgodnie z tym terminem światowa przestrzeń patrzy na świat z własnego punktu widzenia. Środek przestrzeni jest w rzeczywistości centrum świata, a każda transformacja zastosowana do tej przestrzeni (jak w przypadku każdej przestrzeni) jest stosowana od środka. W konsekwencji każdy obiekt na świecie doświadcza dokładnie tych samych transformacji. Załóżmy na przykład, że masz stację kosmiczną obracającą się wokół planety przy <x, y, z>.

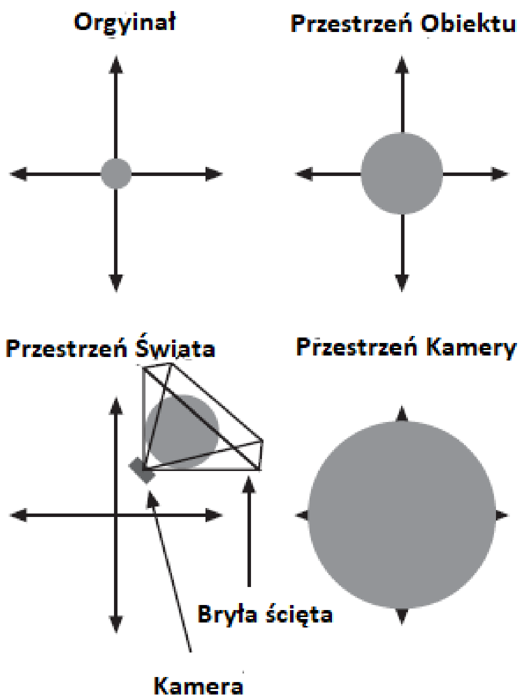
Dzięki obrotowi w przestrzeni kosmicznej stacja kosmiczna obraca się wokół centrum świata, a nie wokół planety. Jeśli chcesz, aby stacja kosmiczna obracała się wokół planety, musisz utworzyć dwa oddzielne obszary obiektów. Macierz transformacji stacji kosmicznej powinna najpierw obrócić stację kosmiczną, a następnie ją przetłumaczyć. Najpierw trzeba obrócić stację kosmiczną wokół siebie (korzystając z transformacji przestrzeni obiektowej); dla uproszczenia, nazwij to "przestrzenią kosmiczną." Pozostaje pytanie, gdzie powinno być przetłumaczone? Następnym krokiem jest stworzenie jeszcze jednej przestrzeni obiektu, która dla uproszczenia można nazwać "przestrzenią planety". W tej przestrzeni obiektu centrum planety jest centrum przestrzeni. Tak więc, po obrocie, należy przetłumaczyć przestrzeń stacji kosmicznej tak, aby środek tej przestrzeni znajdował się w środku miejsca, w którym chciałbyś, aby stacja kosmiczna siadała względem planety. Jeśli chcesz mieć swoją planetę na pozycji <x, y, z>, musisz po prostu stworzyć kolejną macierz transformacji obiektu (nazwij ją "macierzą transformacji planety"), która po prostu musi przetłumaczyć przestrzeń planety tak, aby centrum planeta (a tym samym przestrzeń) znajduje się dokładnie tam, gdzie ma się znajdować planeta (czyli <x, y, z>). Ponieważ w tym miejscu <0, 0, 0> jest centrum świata, ostatecznie miałbyś współrzędne w przestrzeni świata. Szybko, światowa macierz transformacji jest macierzą podobną do macierzy obiektów, ale to stosuje się do całego zestawu obiektów (czyli świata). Dlatego każda matryca światowa musi przyjąć współrzędne w przestrzeni świata dokładnie tak, jak transformacja obiektu.

Przestrzeń Kamery

Jeśli nie planujesz zobaczyć wszystkiego z punktu widzenia świata, prawdopodobnie powinieneś zacząć myśleć o mobilnym punkcie widzenia w swoim świecie: aparacie fotograficznym. Przestrzeń kamery jest prosta. Środek kamery jest środkiem przestrzeni. W związku z tym, gdy otrzymujesz współrzędne w przestrzeni kamery, patrzysz na punkt widzenia kamery, który jest dokładnie tym, czego potrzebujesz. Te same zasady, co wcześniej, odnoszą się do tej przestrzeni. W celu przekształcenia z przestrzeni świata do przestrzeni aparatu, wystarczy utworzyć macierz transformacji kamery , co najpierw obraca świat odpowiednio, po czym przelicza na stanowisko, którego szukasz. Macierz transformacji aparatu jest naprawdę macierzą transformacji świata, ponieważ matryca właściwie działa na każdym obiekcie, ale aby jasne rozróżnienie między nimi, ja wolę nazywać je jako takie. W tym momencie możesz się zastanawiać, co światowa macierz transformacji zajmuje się światem, ale Quake 3 rzeczywiście znalazł interesujący sposób użycia matrycy transformacji świata , Jeśli zanurzysz się w wodzie w Quake 3 i przestaniesz się poruszać, powinieneś zobaczyć, że świat wokół ciebie wydaje się nieco zniekształcony. W rzeczywistości to, co robisz, to zastosowanie falistego czynnika skalującego do świata, aby sprawić wrażenie, jakbyś był pod wodą. Ciekawy efekt mógł zostać zbudowany z pochyłością. Aby wszystko było jasne, spójrz na rysunek 5.1, który pokazuje kroki, przez które musisz przejść. Niektóre interfejsy API 3D, takie jak GL i Direct3D, obsługują już niektóre z tych przekształceń. Na przykład GL łączy obiekt / świat / matrycę kamery w pojedynczą matrycą, co oznacza, że musisz sam ją przyciąć, jeśli chcesz pracować w innej przestrzeni.

Transformacje Liniowe

Istnieje wiele rodzajów transformacji, ale jednym z najważniejszych jest transformacja liniowa. Transformacje same w sobie nie mają znaczenia; aby mieć znaczenie, muszą się do czegoś stosować. W odniesieniu do gier zazwyczaj chcesz przekształcić obiekt, który składa się z wierzchołków lub współrzędnych w przestrzeni, w której pracujesz.



Istnieje kilak różnych rodzajów transformacji liniowych , w tym

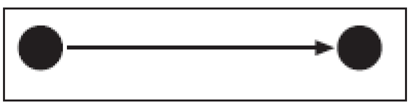
- Translacje
- Skalowanie
- Pochylenie
- Obroty

Ten rodzaj transformacji nazywa się liniowy ze względu dla każdej wypadkowej współrzędnej, równanie jest kombinacją liniową. W 3D każda kombinacja liniowa może zostać narysowana jako zestaw płaszczyzn wyśrodkowany w punkcie początkowym lub jako linie. Rozważmy na przykład kwadratową funkcję x^2; jak dowiedziałeś się w części "Podstawowe elementy geometryczne", płaszczyzny nie można użyć do dokładnego przedstawienia tego równania. Ponieważ transformacje liniowe są kombinacjami liniowymi, mogą być wyrażone w notacji macierzowej jako x' = Ax, gdzie A jest macierzą transformacji, a x jest wektorem współrzędnych. Macierz może być używana jako symbol zastępczy danych dla transformacji. Piękno tego działania jest takie ,że każda transformacja może być przekształcona wewnątrz macierzy 4 x 4. Aby połączyć transformacje, wystarczy pomnożyć macierze, co czyni je bardzo prostymi w obsłudze. Kolejną miłą rzeczą w tym, jak zauważyłeś w rozdziale 3, "Poznaj matryce", jest to, że iloczyn dwóch macierzy może być wyrażony w pojedynczej macierzy, co oznacza, że zestaw transformacji może faktycznie być opisany przez pojedynczą macierz zamiast wymagać od ciebie obliczenia długiego, wietrznego zestawu mnożenia macierzy, za każdym razem, gdy chcesz przekształcić element. Jak zauważyłeś, aby przekształcić wektor za pomocą macierzy transformacji, musisz tylko pomnożyć wektor, aby został przekształcony przez macierz transformacji.

Translacje

Jak pokazano na rysunku , translacje są łatwe do obliczenia w prostym modelu równania. Na przykład, jeśli chcesz dokonać translacji x przez 3, po prostu użyjesz równania x = x - 3. W postaci macierzowej generuje to jednak problem, ponieważ -3 nie jest liniową kombinacją x, y lub z. Rozwiązaniem jest dodanie kolejnego komponentu, aby móc zastosować kombinacje liniowe. Wybierz x, y, z i 1. Jeśli szukasz kombinacji liniowej dla translacji , po prostu musisz napisać kombinację liniową <1, 0, 0,? 3> dla przestrzeni <x, y , z, 1>, a otrzymasz wyżej wymienione równanie. Możesz sprawdzić, czy jest to prawdą, obliczając iloczyn skalarny obu wektorów. Translację można zatem zastosować do x, y, z i teoretycznie do 1 (co w tym momencie nie ma sensu). Tak więc w notacji macierzowej otrzymujesz:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Historycznie rzecz biorąc, delta jest zwykle używana w znaczeniu "różnica". Tak więc w tym przypadku delta x w rzeczywistości oznacza "różnicę w x" i w konsekwencji reprezentuje translację, której zostanie poddane x. Podobnie, możesz powiedzieć to samo o y i z. Możesz sprawdzić, czy to mnożenie macierzy rzeczywiście daje translację przez pomnożenie prawej strony równania. Na przykład, jeśli chcesz przetłumaczyć każdy wierzchołek w twoim świecie <3,- 4, 2>, wygenerujesz następującą macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

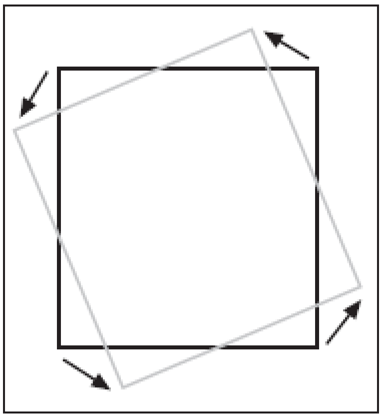
Jeśli wybierzesz wierzchołek <1,2,3>, w którym 4D stanie się<1,2,3,1> otrzymasz czego oczekujesz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+3 \\ 2-4 \\ 3+2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zauważ, że nie byłoby możliwe przetłumaczenie współrzędnych, jeśli pracujesz tylko z macierzą 3x3 w 3D <x, y, z>. Z tego powodu wszystkie transformacje 3D będą musiały być zdefiniowane jako macierze 4x4. Gdyby macierze nie były 4x4, nie bylibyśmy w stanie pomnożyć macierzy razem, nie mówiąc już o obliczeniu odwrotności, która jest wymagana, jeśli chcemy cofnąć translację.

Skalowanie

Definicja skalowania znajduje się w samym słowie; skalowanie to proces posiadania czegoś w "skali" - czyli wzrostu lub kurczenia się - jak pokazano na rysunku Możesz to zrobić, mnożąc każdy komponent swojej współrzędnej przez współczynnik skali (który możesz nazwać s). W związku z tym równanie służące do skalowania współrzędnej x będzie wyglądało jak x '= sx.



Ta definicja jest nieco restrykcyjna, ponieważ każdy element współrzędnej jest skalowane tym samym czynnikiem. Jeśli chcesz, możesz na przykład skalować obiekt tylko w x lub tylko w y. Ta szersza definicja sugeruje, że każdy składnik powinien mieć swój własny współczynnik skali. Oczywiście, jeśli chcesz, aby twój obiekt zachowywał te same proporcje, powinieneś mieć wszystkie współczynniki skalowania równe sobie nawzajem. Tak więc dla komponentu w x wektor <x, y, z, 1> powinien być pomnożony przez <s_x, 0, 0, 0>. Jeśli myślisz o każdym odpowiednim elemencie współrzędnych dla s, w postaci macierzowej, otrzymasz następujące informacje:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

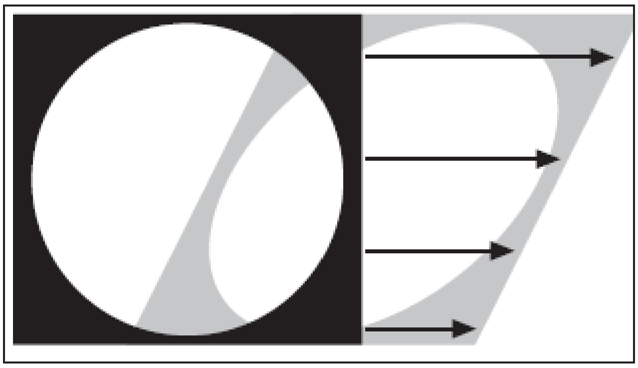
Jak dotąd powinno to być całkiem łatwe. Jeśli, na przykład, chcesz przeskalować <1, 2, 3> o <2, 2, -2>, otrzymasz następujący wynik:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 \\ -2 \cdot 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ten przykład przedstawia interesującą obserwację. Możesz także odbić obiekt od jednej z trzech osi, wybierając współczynnik skali -1 w tej osi. W ten sposób skalowanie może służyć dwóm celom: może pomóc w skalowaniu obiektów i może służyć do odbijania obiektów.

Pochylenie

Chociaż pochylenie jest rzadko wspominane w książkach programistycznych, jest to interesująca operacja i jest kluczem do jednej z najważniejszych transformacji liniowych: rotacji. Pochylenie, jak pokazano poniżej, może być postrzegane jako postępowe tłumaczenie, co oznacza, że zależy ono od wartości innej osi.



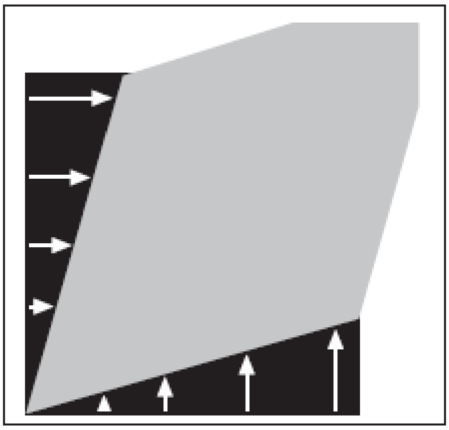
Ważne jest, aby zauważyć, że pochylenie nie jest tym samym, co rozciąganie, które można przypisać skalowaniu. Gdy rozciągasz kształt, zwiększasz jego powierzchnię. Kiedy pochylasz obiekt, nie zmieniasz jego obszaru w żaden sposób, ponieważ translatujesz nieskończenie. małe kawałki tego. To tak, jakbyś przeciął pojedynczą kartkę papieru na dwa osobne kawałki. Przesunąć kawałek w lewo, a to jest faktycznie forma skrzywienia. Powtórz proces, przecinając jedną z dwóch części na pół, a teraz masz dokładniejsze pochylenie. Powtarzaj ten proces w nieskończoność, a wyraźnie widać, że obszar papieru się nie zmienił. Nie usunąłeś ani nie dodałeś żadnego papieru. Poruszanie się w lewą lub prawą stronę, tak jak to robiłeś, jest po prostu przekrzywione na y dla x. Innymi słowy, współrzędne x zostały zmodyfikowane w y. Twierdzenie o obszarze jest zawsze prawdziwe, jeśli jest wyrównane z osią, ale niekoniecznie prawdziwe, jeśli przekrzywienie jest wykonywane na dwóch osiach w tym samym czasie. Innym sposobem patrzenia na pochylenie jest to, że biorąc pod uwagę dowolną wartość x i wysokość y , wartość x jest zawsze tłumaczona o tę samą kwotę dla tego samego y. Tak więc, ze względu na zależność, równanie skośne w x wygląda jak $x' = x + k_x y$. Podobną dedukcję można uzyskać dla y. W 3D pomysł jest dokładnie taki sam. Biorąc pod uwagę współrzędne (takie jak x), możesz albo pochylić (to znaczy przetłumaczyć), aby zmienić wartości y, albo możesz pochylić się, zmieniając wartości z. Z powodu tej zależności od innej zmiennej, pochylenia muszą być stosowane jeden po drugim. W poprzednich przypadkach zauważyłeś, że możesz niezależnie skalować lub tłumaczyć każdą oś. Nie dotyczy to pochylania. Można pomnożyć dwie macierzy skośności, aby pokazać, że nie są one równe. W 3D można użyć następujących macierzy skośnych:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_{xy} & k_{xz} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$ Pochylenie w x

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{yx} & 1 & k_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$ Pochylenie w y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_{zx} & k_{zy} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$ Pochylenie w z

Podsumowując, są to kroki, które należy wykonać, aby pochylić się w każdej osi, ale nie oznacza to wcale, że nie można przechylać jednocześnie w, powiedzmy, x i y. Po prostu wiedz, że pochylenie w xy to nie to samo, co pochylenie w x, a następnie w y lub odwrotnie. Kiedy pochylasz się w taki sposób, jesteś pochylony na osi, która nie jest czysto w x lub y lub z. Na przykład załóżmy, że chcesz przekrzywić linię x = y. W takim przypadku musisz wybrać przekrzywienie na x równe skosowi y; takie przekrzywienie wyglądałoby podobnie jak na rysunku.



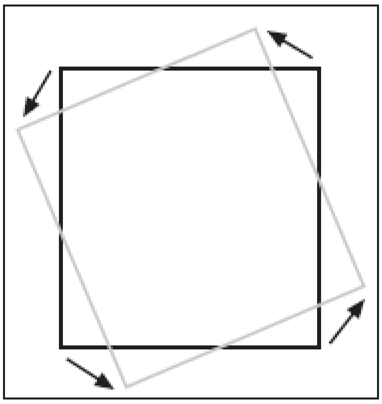
Te typy pochyleń faktycznie zmieniają obszar kształtu, ponieważ nie są one kombinacjami ukośnych osi. Możesz to łatwo zweryfikować, ponownie patrząc na powyższy rysunek . Gdybyś przeciął czarne trójkąty i spróbował je załatać, aby wypełnić obszar, nie byłbyś w stanie tego zrobić. Przyjrzyjmy się przykładowi przekrzywienia w xy dla y i x wzdłuż linii 3y = 2x. Poniższy przykład pokazuje:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3-1 & 0 & 0 \\ 2-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2\cdot 1 \\ 1\cdot 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Możesz się zastanawiać, dlaczego odejmujesz 1 od 2 i 3 w macierzy. Powód jest w rzeczywistości prosty. Chcesz, aby współrzędne <1, 1> przesunęły się do <3, 2>. Po prostu napisz swoją matrycę jako system liniowy ze skośnymi niewiadomymi, a następnie wyizoluj nieznane, a zauważysz, że tak właśnie jest.

Obroty

Rotacje, przedstawione na rysunku 5.6, są często abstrakcyjnie definiowane w książkach



Podobnie jak test, spróbuj zdefiniować obrót matematycznie bez użycia słów takich jak "toczenie", co w rzeczywistości jest tylko produktem rotacji. Oczywiście nie jest to proste, ale można je zdefiniować bardziej rygorystycznie, aby uzyskać znacznie prostszy dowód na równania. Bardziej rygorystyczna definicja nie tylko jest łatwiejsza do przetworzenia, ale także ujawnia niezwykle interesującą relację między pochyleniem a rotacją. Właściwości wymagane do obrotu mogą być opisane jednym słowem: ortonormalny. Rotację można opisać jako transformację ortonormalną. To dziwacznie brzmiące słowo łatwo ulega rozkładowi na dwa oddzielne słowa: orto i normalny (lub, jeśli wolisz, ortogonalny i normalny). Szybkim sposobem sprawdzenia, czy macierz jest ortogonalna, jest jej pomnożenie przez jej transpozycję i sprawdzenie, czy wynikowa macierz jest przekątna. Jest to bezpośrednia konsekwencja samej definicji ortogonalnej. Kiedy dwa różne wektory (lub wiersze, w tym przypadku) są pomnożone razem, powinieneś otrzymać zero z definicji. Jeśli pomnożysz ten sam wektor dwa razy, co zdarza się tylko dla elementów na przekątnej, otrzymasz nieokreśloną wartość, a tym samym macierz diagonalną. Potrzebujesz również, aby wektory były normalne. Jeśli pamiętasz, normalny wektor to normalny, który ma normę 1, często nazywany także wektorem jednostkowym. Podobnie, macierz transformacji jest normalna, jeśli uzyskany wektor jest tak samo prawidłowy, jak otrzymany transformowany wektor. Jest to również wymagane w przypadku rotacji. Wyobraź sobie, co by się stało, gdyby podczas obracania obiekt był skalowany. Oczywiście nie możesz na to pozwolić. Połącz oba pojęcia, a otrzymasz transformację ortonormalną - transformację, dla której każdy wiersz i wektor kolumn ma 2-normę 1 i macierz transformacji M, gdzie MM^T jest macierzą diagonalną. Możesz połączyć pierwszy i drugi wynik, aby dojść do wniosku, że MM^T powinna być matrycą tożsamości. Zacznijmy od zajęcia się wersją 2D obrotu. Zacznij od macierzy tożsamości. Sztuczka do obracania polega na wybieraniu skośnych elementów, tak aby pierwszy wektor był prostopadły do drugiego wektora za każdym razem. Następująca macierz T może to zrobić, jak pokazano:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{T}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -a \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} = a - a = 0$$

Te typy macierzy mają faktycznie swoją własną nazwę: macierze skośno-symetryczne lub macierze antysymetryczne. Dzieje się tak dlatego, że skośny element macierzy jest ujemny względem drugiego elementu ukośnego po drugiej stronie przekątnej. Okazało się, że ta macierz transformacji jest ortogonalna, ale wyraźnie nie jest normalna (jeszcze). Jest to o wiele bardziej naturalne, jeśli myślisz o obrotach pod względem współrzędnych biegunowych. Zamień swój nieznany na a na współrzędne biegunowe, a ponieważ chcesz znormalizować wartość, wybierz promień 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \cdot \sin(\theta) \\ -1 \cdot \sin(\theta) & 1 \end{bmatrix}$$

Fakt, że sinus został wybrany nad cosinusem, jest absolutnie nieistotny; po prostu zmienia pozycję kąta odniesienia w obrocie. W tym momencie masz transformację, która nie jest normalna. Norma kolumn lub norma wierszy powinna wynosić 1, aby macierz była normalną macierzą transformacji. Oznacza to, że aktualnie macierz jest ortogonalna, ale nie ma odpowiedniej wielkości, więc wystarczy skalować obiekt, aby jego rozmiar pozostał niezmieniony. Możesz zweryfikować, że skalowanie przez cos (ϕ) Wykonuje trik przez obliczenie wyznacznika macierzy. Tak więc, ostateczna macierz do zastosowania rotacji ϕ następująco:

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

Gdybyś wybrał cosinus zamiast sinusa, każdy cosinus zamieniłaby się z sinusem, ale nadal miałbyś bardzo ważną macierz rotacji. Jedynym problemem jest to, że kąt będzie miał odchylenie, podczas gdy ten obraca się zgodnie z oczekiwaniami. W związku z tym obrót jest właściwie tylko skalowaną macierzą skośno-symetryczną. Obejmuje to sposób rotacji w 2D, ale co z 3D? Tak się składa, że obrót w 2D jest taki sam jak obrót wokół osi Z. Jeśli myślisz o x i y jako arkuszu papieru i osi z, gdy oś wystaje z papieru, możesz zobaczyć, że obracanie papieru faktycznie obraca się wokół osi Z. Tak więc macierz obrotu dla tej transformacji jest następująca:

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Masz już dwa wektory, które są ortonormalne, więc dlaczego nie użyć ich do zbudowania rotacji wokół innych osi? Trzeba po prostu zauważyć, że obrót wokół osi jest zawsze taki, że współrzędna dla tej osi pozostaje niezmieniona. W związku z tym po prostu trzeba odpowiednio ustawić swoje czynniki. Aby obrócić wokół osi Y, macierz do użycia jest następująca:

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zauważysz, że znak został przesunięty. W rzeczywistości jest to w pełni poprawny obrót, aby zachować znak, jak to było zrobione wcześniej, ale ta forma obrotu jest trochę bardziej praktyczna z powodu jego orientacji obrotowej. Fakt, że znak jest zmieniany zmienia tylko orientację obrotu i nic więcej. Na koniec obrót wokół osi x można wykonać za pomocą następującej macierzy :.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Znowu, podobnie jak w przypadku pochyleń, nie oznacza to, że nie można wykonać obrotu w, powiedzmy, xy. Dopóki twoja macierz jest transformacją ortonormalną, twoja matryca jest nadal, technicznie rzecz biorąc, rotacją. Jedynym problemem jest to, że może stać się dość zagmatwany. Poniższy przykład pokazuje, jak obliczyć obrót współrzędnej wokół osi X:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2+3 \\ -2+3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wiele transformacji liniowych

Widzieliście, jak można zastosować wiele operacji na wektorze, ale wyraźnie, może być użyteczne zastosowanie zestawu operacji na wektorze. Załóżmy na przykład, że chcesz obrócić wektor, przetłumaczyć go, a następnie obrócić w innym kierunku. Matryce są tutaj pomocne, ponieważ umożliwiają obliczenie jednej macierzy transformacji zawierającej wszystkie potrzebne transformacje liniowe. W rzeczywistości operacja jest naprawdę prosta. Wszystko, co musisz zrobić, to działać na matrycach takich jak stos. Załóżmy na przykład, że masz dwie transformacje, A i B, i chcesz zastosować B, po którym następuje A (pamiętaj, że macierze - i, w konsekwencji, transformacje - nie są przemienne, ogólnie mówiąc, nie możesz ich zamienić). Biorąc pod uwagę wektor x, otrzymujesz pierwszą transformację w następujący sposób:

Bx = a Pierwsza transformacja

Aa = b Druga transformacja

Zastępując

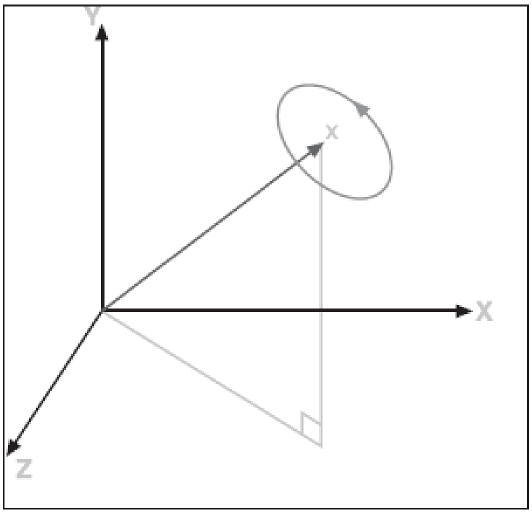
ABx = b

Cx b , C = AB

W związku z tym, biorąc pod uwagę zestaw przekształceń liniowych, można zastosować uporządkowany zestaw transformacje do wektora przez proste obliczenie odwrotnego mnożenia macierzy. Tak więc, zamiast obliczać dwie lub więcej macierzowych multiplikacji dla każdego wektora, wystarczy obliczyć produkt transformacji jeden raz, a następnie obliczyć jedno mnożenie na wektor. To całkiem spora zaleta. Jak już wspomniano, macierze nie są przemienne. Oznacza to, że kolejność macierzy jest ważna i nie można jej zlekceważyć. Nie można zmieniać matryc podczas ich pomnażania. Innymi słowy, tłumaczenie obiektu, po którym następuje transformacja skali, nie jest równoznaczne ze skalowaniem, a następnie tłumaczeniem. Na przykład, jeśli przetłumaczysz, a następnie skalujesz, równanie, które uzyskasz dla pojedynczego komponentu, będzie przypominało x = (x’+ t) * s. Z drugiej strony, jeśli zaczniesz od skalowania, a następnie translacji, otrzymasz coś wzdłuż linii x = x’• s + t, która jest drastycznie inna. Podobnie macierze obrotu zależą również od kolejności. Obracanie w x, po którym następuje rotacja w y, nie jest tym samym, co pierwsze obracanie w y, a następnie obrót w x. Wszystko to oznacza, że może być dość mylące ustalenie kolejności, w jakiej należy zastosować rotację. Jeśli twoja ulubiona biblioteka 3D pozwala ci na to automatycznie, użyj jej. Biorąc to pod uwagę, warto zrozumieć, co się dzieje pod spodem, ponieważ, jak zobaczycie w kolejnych rozdziałach, takich jak Rozdział 10, "A potem to uderza: potrzebujesz wykrywania kolizji", obracanie obiektu ręcznie jest czasem jedynym sposobem Idź, biblioteki idą tak daleko. Nie pozwolą ci wprowadzać innowacji. Jeśli nie rozumiesz, jak działają podstawy, jak wymyślić równanie, które obraca się wokół wektora?

Rotacja wokół losowej osi

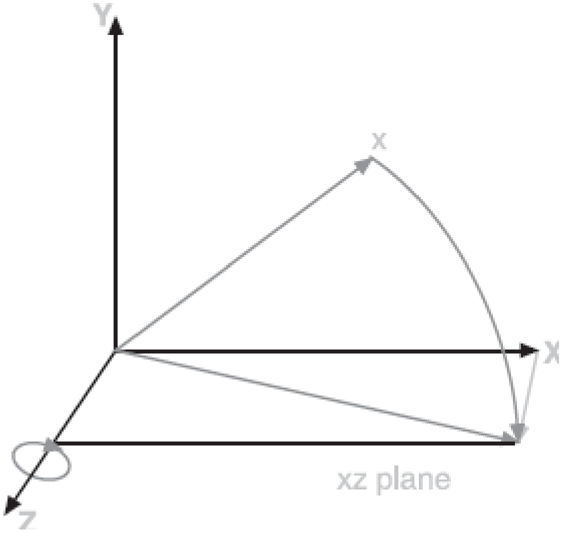
Nauczyłeś się obracać obiekt wokół jednej z trzech osi w 3D, jak pokazano na rysunku



Ale co się stanie, jeśli chcesz obrócić obiekt wokół dowolnej osi w 3D? Na początku ten problem wygląda jak algebraiczny potwór, ale najprostszym sposobem rozwiązania dowolnego problemu jest myślenie na wyższym poziomie. Wiesz już, jak obracać obiekt wokół osi z, więc tutaj możesz obrócić dowolną oś tak, że wyrównuje się z osią Z, obraca obiekt wokół osi Z, a po zakończeniu cofnij obrót zastosowany do osi obrotu. Łatwiej powiedzieć niż zrobić, ale w kategoriach macierzowych, co masz jest następujące dla wektora współrzędnych x, gdzie R jest macierzą obrotu, która obraca obiekt tak, że oś obrotu wyrównuje się z osą Z, a M jest rzeczywistą macierzą obrotu do obrócić obiekt ϕ:

$R^{-1}MRx$

M jest po prostu obrotem wokół osi Z i jest dość łatwe. Trudną częścią jest wiedzieć, jak uzyskać R. Istnieje wiele sposobów, aby to zrobić; najpierw należy obrócić wokół osi Z tak, aby wektor obrotu znajdował się na płaszczyźnie xz, jak pokazano na Rysunku



Gdy to zrobisz, stracisz komponent y dla wektora obrotu i możesz zakończyć zadanie obracając wektor wokół osi Y tak, aby pasował do osi z. Teraz pozostaje tylko znaleźć wartość cos (ϕ i sin (ϕ) Dla każdego z obrotów. Możesz spojrzeć na problem w sposób geometryczny, ale w tym przypadku łatwiej i mniej podatny jest na to algebraicznie. Wszystko, co musisz zrobić, to upewnić się, że pierwsza rotacja, którą zastosujesz do swojego wektora obrotu v, daje zero w składniku y. Aby obrót wokół osi Z był taki, że wektor obrotu wyląduje na płaszczyźnie xz, obowiązuje:

$$\mathbf{R}_z\mathbf{c} = \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

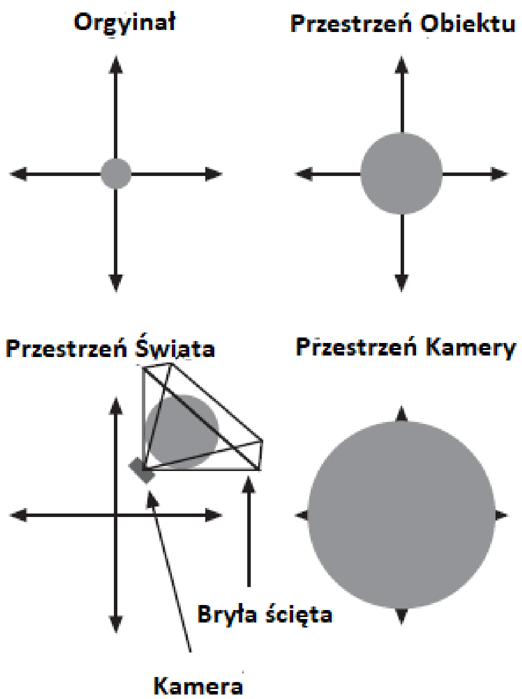
$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aby rozwiązać system, weź dwa równania: -bx + ya = 0 i znany fakt o cosinusach i sinusach $b^2 + a^2 = 1$, i powinieneś być w stanie wyizolować zarówno dla a i b, aby uzyskać następujące:

$$a = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$b = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Dokładnie ten sam pomysł można wykorzystać do uzyskania macierzy obrotu wokół osi y, jak pokazano na rysunku



za pomocą R_zC, uzyskując dwie macierze obrotu:

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 & -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jeśli połączysz obie macierze, aby uzyskać macierz R, która obróci twoją przestrzeń tak, aby wektor obrotu był wyrównany z osią Z, i jeśli założysz, że oś obrotu jest normalna, otrzymasz następującą macierz obrotu:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 & -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ostatnim etapem procesu jest obliczenie obrotu wokół osi Z i cofnięcie obrotu R poprzez przekształcenie obiektu za pomocą jego odwrotności. Zastosowanie ma następujące uzasadnienie:

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{MR} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{z\cdot x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \\ \frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \\ \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{z\cdot x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{z\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x^2+(y^2+z^2)\cos(\theta)}{x^2+y^2+z^2} & \frac{x(1-\cos(\theta))y+z\sin(\theta)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2} & \frac{zx(1-\cos(\theta))+y\sin(\theta)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2} & 0 \\ \frac{x(1-\cos(\theta))y-z\sin(\theta)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2} & \frac{(x^2+z^2)\cos(\theta)+y^2}{x^2+y^2+z^2} & \frac{zy(1-\cos(\theta))+x\sin(\theta)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2} & 0 \\ \frac{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}(1-\cos(\theta))x+y\sin(\theta)(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}(1-\cos(\theta))y-x\sin(\theta)(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{(x^2+y)\cos(\theta)+z^2}{x^2+y^2+z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zwróć uwagę, że odwrotność obrotu jest faktycznie transpozycją oryginalnej matrycy. Jest to zawsze prawdziwe w przypadku macierzy obrotowych i znacznie upraszcza niektóre obliczenia. Aby uprościć równania w macierzy, wybierz wektor rotacji v, który jest już znormalizowany, i użyj tożsamości pitagorejskiej. Upraszcza to macierz rotacji do następujących:

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{MR} = \begin{bmatrix} x^2(1-\cos(\theta))+\cos(\theta) & x(1-\cos(\theta))y+z\sin(\theta) & zx(1-\cos(\theta))-y\sin(\theta) & 0 \\ x(1-\cos(\theta))y-z\sin(\theta) & y^2(1-\cos(\theta))+\cos(\theta) & zy(1-\cos(\theta))+x\sin(\theta) & 0 \\ z(1-\cos(\theta))x+y\sin(\theta) & z(1-\cos(\theta))y-x\sin(\theta) & z^2(1-\cos(\theta))+\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jeśli więc chciałbyś obrócić współrzędną <3, 3, 3> wokół nie znormalizowanej osi <1,2, 3> przy 30 stopniach, obliczalibyście nową współrzędną w następujący sposób:

$$\left(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{MR}\right)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14}+\frac{13\sqrt{3}}{28} & \frac{1}{7}-\frac{\sqrt{3}}{14}+\frac{3\sqrt{14}}{28} & \frac{3}{14}-\frac{3\sqrt{3}}{28}-\frac{1}{\sqrt{14}} & 0 \\ \frac{1}{7}-\frac{\sqrt{3}}{14}+\frac{3\sqrt{14}}{28} & \frac{2}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14} & \frac{3}{7}-\frac{3\sqrt{3}}{14}+\frac{\sqrt{14}}{28} & 0 \\ \frac{3}{14}-\frac{3\sqrt{3}}{28}+\frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{7}-\frac{3\sqrt{3}}{14}-\frac{\sqrt{14}}{28} & \frac{9}{14}+\frac{5\sqrt{3}}{28} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

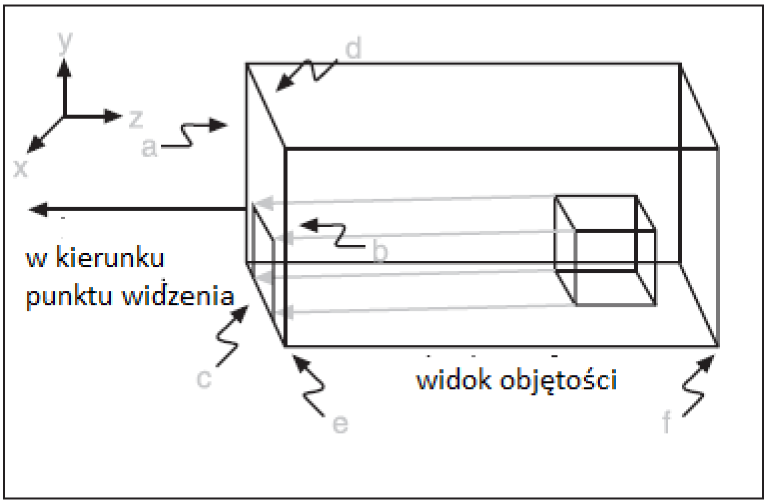
$$= \begin{bmatrix} 3.1712 \\ 2.1407 \\ 3.5157 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rzuty

W jaki sposób temat taki jak rzuty może wrócić do stołu? Jak się okazuje, mamy współrzędne w 2D, ale z jakiegoś powodu mój komputer odmawia pokazania mi obrazów 3D. To musi mieć coś wspólnego z tym, że mój ekran jest płaski. Jeśli nie masz zupełnie nowego monitora 3D, będziesz musiał również przekonwertować współrzędne 3D na 2D. Brzmi jak strasznie skomplikowane zadanie, ale naprawdę jest bardzo proste. Są na to różne sposoby - niektóre lepsze od innych - wszystko opiera się na zasadzie rzutu. Dwa główne typy rzutów które tu omówię, to rzut ortogonalny , przydatne w grach 3D i rzut y która świetnie nadaje się do gier izometrycznych.

Projekcja ortogonalna

Rzut ortogonalny jest jednym z wielu sposobów wyświetlania współrzędnych 3D na powierzchni 2D. Chodzi o to, aby po prostu rzutować składnię z ortogonalnie na płaszczyznę xy, jak pokazano na rysunku



skrócie, jest tak, jakby całkowicie zapomnieć o składniku z współrzędnych <x, y, z>. Nie jest to najciekawsza projekcja, ale jest to typ widoku, który był szeroko stosowany w starszych grach, takich jak Sim City i wielu innych, które używały 45-stopniowego widoku z góry. Z powodów, które wkrótce zobaczysz, bardzo praktyczne jest odwzorowanie każdej współrzędnej w zakresie [- 1, 1] dla każdego komponentu. Wszystko, co musisz zrobić, aby to się stało, to skalować współrzędne i tłumaczyć je tak, aby kamera mogła zobaczyć wszystko ograniczone przez [-1, 1]. Ten sam proces stosuje się do x, y i z. Więc bez utraty ogólności, załóżmy, że zaczynasz od x, dla którego zdecydowałeś, że każda współrzędna będzie miała zasięg [a, b]. Aby odwzorować x w taki sposób, aby pasowało do zakresu -1, 1], można najpierw przetłumaczyć współrzędną taką, że pierwsza połowa jest ujemna, a druga połowa jest dodatnia. Możesz to zrobić, odejmując średnią skrajności. Po zastosowaniu tłumaczenia wystarczy zmienić skalę współrzędnych, używając:

$$x' = \frac{\text{Nowa Długość Przestrzeni} \quad (\text{x - Srodek Translacji})}{\text{Stara Długość Przestrzeni}}$$

$$= \frac{(1-(-1))\left(x - \frac{b+a}{2}\right)}{b-a}$$

$$= \frac{2x-(b+a)}{b-a}$$

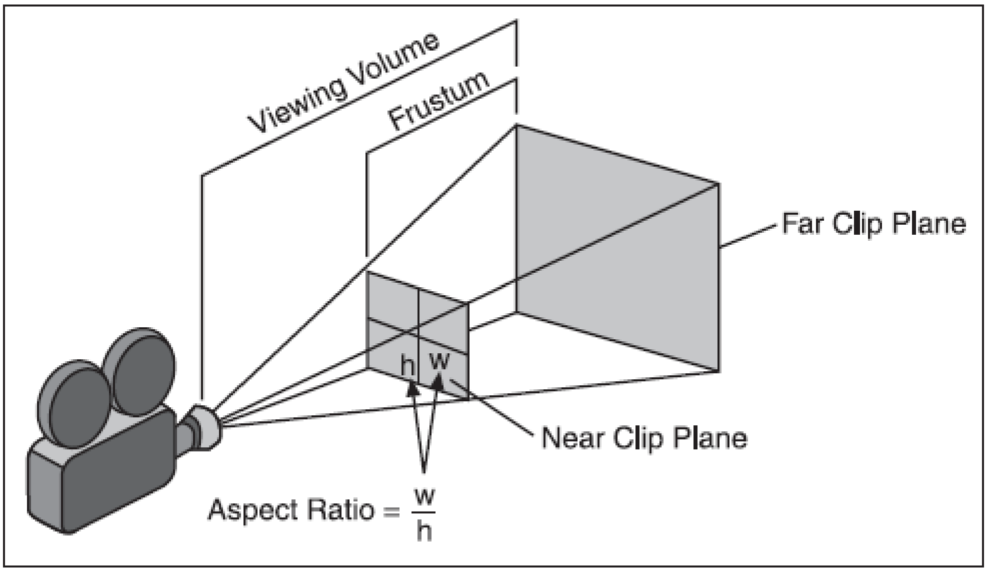
$$= \frac{2x}{b-a} - \frac{b+a}{b-a}$$

Oznacza to, że rzut ortogonalny może rzeczywiście być wyrażony jako kombinacja liniowa. Dla każdej współrzędnej wynik jest skalą, po której następuje translacja (dokładnie to, czego można się spodziewać). W konsekwencji macierz, która może zastosować rzut ortogonalny do współrzędnych <x, y, z, 1> z ograniczeniami <[a, b], [c, d], [e, f], 1> jest następująca:

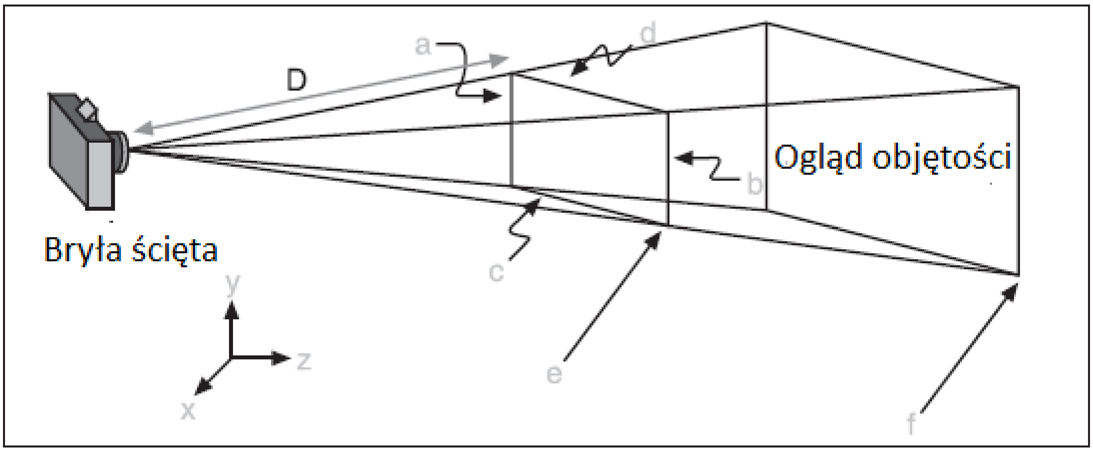
$$\begin{bmatrix} \frac{2}{b-a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{d-c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-e} & 0 \\ -\frac{b+a}{b-a} & -\frac{d+c}{d-c} & -\frac{f+e}{f-e} & 1 \end{bmatrix}$$

Rzut perspektywiczny

Rzut ortogonalny jest interesujący, ale ma swoje wady. Warto zauważyć, że jeśli założysz, że cylinder jest zdefiniowany pomiędzy przedziałem [- 1, 1], macierz upraszcza tożsamość, co oznacza, że <x, y, z, 1> mapuje się do siebie. Jeśli więc zajrzysz do cylindra ortogonalnej projekcji od początku, zobaczysz tylko boczną krawędź cylindra i nic w środku cylindra. Rzeczywistością naszego świata jest to, że im dalej znajdują się obiekty, tym mniejsze powinny się pojawić. Z tego powodu potrzebny jest inny rodzaj stożka ściętego - taki, który uwzględnia ten fakt.



Możemy zacząć od zdefiniowania stożka ściętego jako kształtu opisującego obszar, w którym każdy wierzchołek jest widoczny na ekranie, jak pokazano na rysunku



Geometrycznie można reprezentować ścięty kawałek jako pudełko. Jeśli umieścisz oko (to znaczy aparat) przed skrzynką, biorąc pod uwagę ortograficzną projekcję, pole pojawi się jako kwadrat, ponieważ zakresy wszystkich składników tworzą skrzynkę. Z drugiej strony, z rzutem perspektywicznym, płaszczyzna z tyłu powinna mieć więcej obszaru niż płaszczyzna z przodu. Może to doprowadzić do pewnego zamieszania, ponieważ wcześniej wspomniano, że przedmioty znajdujące się dalej powinny wyglądać na mniejsze, ale jeśli zastanowimy się nad tym przez chwilę, tak naprawdę dzieje się tutaj. Obiekty z tyłu przyjmują mniejszą część płaszczyzny tylnej, jeśli zastosujesz na niej rzut prostopadły. W związku z tym są one mniejsze (w procentach). Pomysł ten pozostawia bryłę ściętą, która wygląda jak odcięta piramida, w której szczyt jest pozycją kamery, jak pokazano na rysunku. Trudną częścią jest wymyślenie transformacji wymaganej do uzyskania takiego kształtu. Ta transformacja powinna przekształcić taką bryłę w skrzynkę. Ponieważ już wiedząc, że pole jest tym samym, co rzut ortogonalny, wszystko, co musisz zrobić, to zastosować projekcję do transformacji. Perspektywiczna projekcja tego typu może wyglądać na bardzo skomplikowaną, ale w rzeczywistości wraca do matematyki, którą najprawdopodobniej widziałeś w pierwszym roku liceum. Rzut działa dokładnie tak, jak projektor octanowy w odwrotnej kolejności. (Jestem pewien, że to przyniesie ci naprawdę ekscytujące wspomnienia!) Jeśli spojrzysz na piramidalny stożek z boku, możesz zredukować problem do prostszego. Każda wiązka światła musi zejść do kamery, więc niezależnie od tego, gdzie obiekt może siedzieć, jeden z jej wierzchołków musi wylądować na punkcie kamery. Aby określić, gdzie na "płaszczyźnie ekranu" wierzchołek będzie lądował, wystarczy rzucić linię w 3D od wierzchołka aż do kamery. Następnie obliczyć przecięcie między linią a płaszczyzną. Oczywiście można wszystko obliczyć tak jak w rozdziale 4, ale nie byłoby to zbyt mądre, ponieważ znacznie łatwiej jest to zobaczyć, patrząc na widok 2D z widoku 3D. Zasadniczo sprowadza się do związku między trójkątem a dowolnym mniejszym trójkątem, który ma takie same proporcje. Równanie konwersji ze współrzędnych 3D na 2D jest następujące:

$$x' = \frac{D \cdot x}{z}$$

$$y' = \frac{D \cdot y}{z}$$

Ponieważ przekształca ona twoją piramidalną stożek ścięty w skrzynkę, możesz po prostu zakończyć wszystko, stosując rzut ortogonalny. Ponieważ zarówno x, jak i y są takie same, zastosujmy logikę tylko na x:

$$x'' = \frac{D \cdot x'}{z}$$

$$-\mathrm{Proj}_{px} = \frac{-2x''}{b-a} - \frac{b+a}{b-a}$$

$$\mathrm{Proj}_{px} = \frac{2Dx}{z(b-a)} + \frac{z(b+a)}{z(b-a)}$$

$$= \frac{1}{z}\left(\frac{2x}{b-a} + \frac{z(b+a)}{b-a}\right)$$

Zwykle nie jest to bardzo interesująca algebraiczna manipulacja, ale co to powoduje

Warto dodać, że wartość 1 nad z została uwzględniona. Odwrotność z musi zostać rozważona, ponieważ nie pasuje do definicji kombinacji liniowej. Jeśli funkcja nie jest kombinacją liniową, nie można jej wyrazić za pomocą macierzy i dlatego staje się dla użytkownika bardzo nieporęczna. Aby to naprawić, należy wziąć pod uwagę z i pominąć podział przez z jako część macierzy. Kiedy przychodzi czas na obliczenie rzeczywistych współrzędnych 2D transformacji, po prostu dzielimy się ponownie przez z. To kłopotliwe, ale przynajmniej działa. Pozostaje pytanie, co stanie się z? Nadal potrzebujesz z mieć pełną matrycę, więc jak zachowuje się z wyżej wymienioną transformacją? Największym błędem, jaki można popełnić, jest myślenie, że po prostu robi to samo, co zrobiła z poprzednią projekcją. Najprostszym sposobem, aby to zobaczyć, jest ustalenie dwóch równań (po jednym dla każdej granicy, jak widać w rzutowaniu ortogonalnym) i rozwiązanie dla dwóch niewiadomych, {A, B}:

$$1 = \frac{A}{e} + B$$

$$-1 = \frac{A}{f} + B$$

W tym momencie jest to nudna praca algebraiczna, która daje:

$$A = \frac{-2ef}{f - e}$$

$$B = \frac{-f - e}{f - e}$$

Do tej pory raczej nie dbaliśmy o czwartego członka każdej współrzędnej (1), głównie dlatego, że nie miało to wpływu. W tym konkretnym przypadku tak jest. Plan z macierzą polega na zastosowaniu podziału przez z po zastosowaniu macierzy. Aby trochę ułatwić, możesz pomnożyć całą współrzędną przez skalarne z. Ponieważ podzielisz współrzędne według skalarnego identyfikatora odwrotności z, musisz wziąć pod uwagę, że czwarty składnik (który zwykle jest 1) musi być 1 po podziale. Ponieważ z / z = 1, łatwo zauważyć, że jedyną rzeczą, którą musisz zrobić, aby to się stało, jest upewnienie się, że czwarty komponent ma wartość z. Wszystko to daje następującą matrycę projekcji:

$$\begin{bmatrix} \frac{2D}{b-a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2D}{d-c} & 0 & 0 \\ \frac{b+a}{b-a} & \frac{d+c}{d-c} & \frac{-f-e}{f-e} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-2ef}{f-e} & 0 \end{bmatrix}$$

Kiedy fizycznie renderujesz wszystko na ekranie, potrzebujesz tylko komponentu x i y, więc o co chodzi z obliczaniem wartości z, a nawet w, czwartej współrzędnej? Być może zauważyłeś w swoim ulubionym FPS, że możesz "powiększyć" scenę. Współczynnik powiększenia jest ściśle powiązany z zasadą rzutowania perspektywicznego. Twoje intuicyjne przypuszczenie prawdopodobnie spowodowałoby powiększenie sceny tak, aby obszar wyglądał na większy, ale po prostu nie wygląda zbyt dobrze. Najlepszym sposobem na osiągnięcie tego jest zmiana kąta projekcji. Większość gier używa pola widzenia kąt około 90 stopni, co daje całkiem dobre wyniki. Na przykład, jeśli chcesz powiększyć za pomocą karabinu snajperskiego, możesz patrzeć pod kątem 15 stopni. To wszystko zależy od tego, ile chcesz powiększyć

Rzut Ekranowy

Podsumujmy. Najpierw zastosujesz transformację obiektu, która jest lokalna dla obiektu. Następnie zastosujesz transformacje światowe do całego zestawu obiektów, a następnie przekształcenia wymagane przez aparat. Daje to współrzędne z perspektywy kamery. Następnym krokiem jest rzutowanie tych współrzędnych w taki sposób, aby można było renderować obiekty na ekranie 2D. Współrzędne utworzone przez najnowsze transformacje mają zakres [-1, 1], ale jeśli twój ekran nie ma trzech pikseli, to nie zadziała. Dlatego też ostatnia macierz transformacji, którą należy zastosować, to wypełnienie całego ekranu. Nazwij tę macierz "macierzą transformacji ekranu". Załóżmy na przykład, że używasz rozdzielczości 800? 600. W tym przypadku Matryca transformacji ekranu byłaby odpowiedzialna za konwersję każdej współrzędnej z [-1, 1] do 800x600. Co więcej, geometria ekranu jest taka, że <0, 0> znajduje się w najkrótszym narożniku, podczas gdy w najpełniejszym zakresie znajduje się w prawym dolnym rogu. W konsekwencji matryca ta jest również odpowiedzialna za ewentualne odwrócenie lub odzwierciedlenie sceny tak, że spełnia ona ten warunek. Podsumowując, ta matryca jest mało interesująca dla naszych celów, ponieważ jest zwykle ukrywana przez warstwy sprzętowe.

Ograniczenie Płaszczyzny Bryły Ściętej

Jak zobaczysz później , może być niezwykle użyteczne poznanie równania płaszczyzn, które ograniczają wasze ślady. Jeśli do tej pory rozumiałeś wszystko w tym rozdziale, nie powinieneś mieć absolutnie żadnego problemu z ustaleniem tego. Jak widzieliśmy wcześniej , każda płaszczyzna może być wyrażona jako 4-wektorowa. Ponieważ powstały stożek ścięty (po transformacji) jest zawsze w kształcie pudełka, można oczekiwać, że płaszczyzna wynikowa będzie jedną z sześciu płaszczyzn ustawionych osiowo, tworzących pole. Następująca logika dla macierzy projekcyjnej M i wektora płaszczyzny P, gdzie podstawa oznacza przetłumaczone płaszczyzny jednostkowe, wynika:

$$\mathbf{MP} = \mathbf{P'}$$
$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{MP} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P'}$$
$$\mathbf{P} = \mathbf{M}^{T}\mathbf{P'}$$

Transformacje Nieliniowe

Do tej pory rozdział ten zajmował się tylko transformacjami liniowymi (z zaznaczonym wyjątkiem projekcji perspektywicznej). Transformacje liniowe mogą uwzględniać wiele wspólnych przekształceń, ale nie wszystkie z nich. Niestety, jeśli chcesz utworzyć nieliniowe transformacje, musisz utworzyć własną przestrzeń wektorową, co oznacza, że nie będziesz w stanie korzystać z możliwości sprzętu wideo. Powiedział, że można wygenerować kilka naprawdę fajnych efektów z nieliniowymi transformacjami. Na przykład wcześniej wspomniałem, jak Quake 3 radził sobie z efektem wody, stosując transformacje liniowe. Jeśli kiedykolwiek grałeś w grę Quake 1, możesz pamiętać, że woda w tej grze była w rzeczywistości dużo bardziej fantazyjna niż ta, która jest wyświetlana w Quake 3. Woda w grze Quake 1 tworzy fale w ruchu sinusoidalnym, co sprawia wrażenie płynnego poruszania się. Aby to osiągnąć, Quake 1 użył transformacji nieliniowej (ponieważ funkcje sinusowe nie są funkcjami liniowymi). Aby osiągnąć ten efekt, Carmack najprawdopodobniej przekształcił cały obraz w bufor, a następnie renderował obraz na ekran, przesuwając piksele w ruchu sinusoidalnym. Innym podejściem, które można zastosować w 3D, jest przesunięcie wierzchołków w ruchu sinusoidalnym. Jedyną wadą jest to, że musiałbyś je sam przekształcić, zamiast robić to za ciebie. Jeśli masz wystarczającą moc procesora, może warto. Załóżmy, że chcesz osiągnąć ten efekt falistej wody. Najpierw musisz zaimplementować cały stos transformacji. Niestety, dostępne dziś interfejsy API 3D nie pozwalają przechwytywać transformacji w środku, więc trzeba będzie ustawić transformacje na tożsamość i obliczać wszystko samodzielnie. Powinieneś już wiedzieć, jak to zrobić (dzięki poprzedniej sekcji), więc przejdźmy do dobrych rzeczy. Aby to osiągnąć, dodaj kolejną transformację między transformacją rzutowania a transformacją ekranu. W tym momencie każda współrzędna ma zakres [-1, 1], który dobrze pasuje do krzywych sinusoidalnych. Chcemy nieco przesunąć wierzchołki w ruchu sinusoidalnym. W związku z tym można się domyślić, że równanie, na które patrzysz, jest czymś podobnym. Jedyną rzeczą, którą musisz zrobić w tym momencie, to wybrać wizualnie przyjemne wartości dla a, b, c, d i dwóch czynników. Prawdopodobnie będziesz chciał, aby czynniki a, b, c i d były dość małymi liczbami, abyś mógł uzyskać wiele fal na ekranie. Ponadto prawdopodobnie chcesz czynniki to małe liczby, aby uzyskać więcej niż jedną falę na ekranie. Na koniec prawdopodobnie potrzebujesz animacji, co oznacza, że musisz wstawić zmienną czasową gdzieś w fali sinusoidalnej; możesz dodać współczynnik czasu, aby to osiągnąć. Tego typu intuicyjna metoda określania równań faktycznie nie ma zdefiniowanych kroków. Zasadniczo trzeba pomyśleć o funkcji, którą próbujesz osiągnąć i które zmienne zmienią równanie. Z początku nie jest to łatwe zadanie, ale z czasem staje się bardzo naturalne.