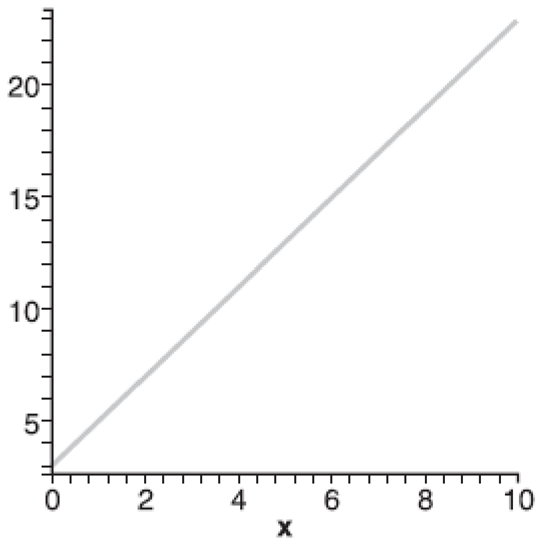


Granica tej funkcji dla x = 3 wynosi 9. Możesz napisać to w następujący sposób:

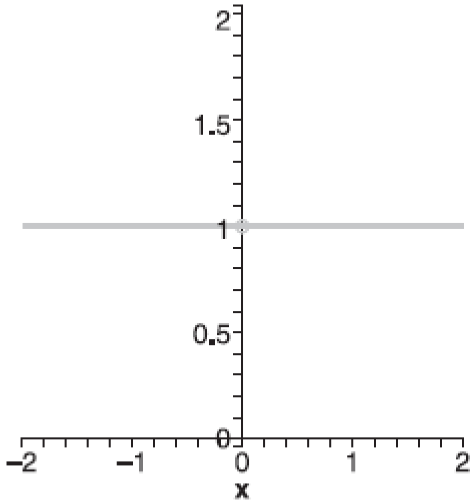
$$\lim_{x \to 3} f(x) = 9$$

Jeśli zastąpisz x = 3 w równaniu, możesz sprawdzić, czy otrzymałeś 9, ale zawsze robisz to nieprawidłowo, jak wkrótce zobaczysz. Jeśli pozostaniesz ściśle zgodny z definicją, możesz zweryfikować, że im bliżej x = 3, tym bardziej zbliżasz się do 9. Tabela ilustruje ideę:

x	Result
2	7
2.5	8
2.9	8.8
2.999	8.998
3.001	9.002

Jeśli spojrzysz na funkcję bez patrzenia na jej wartość x = 3, łatwo zobaczysz, że wartość będzie "zmierzać w kierunku" 3. Ta idea "zmierzaj do" jest ważna, ponieważ pojęcie limitu jest również zdefiniowane dla funkcji, które nie określaj wartości ścisłej. Jeśli funkcja nie jest zdefiniowana dla danej wartości, limit może nadal istnieć, o ile wartości w sąsiedztwie tej wartości zmierzają w kierunku wartości. Zaskakująco, funkcja, która może mieć wynik 3, może zakończyć się wynikiem -2 jako ograniczeniem, jeśli na przykład funkcja jest zerwana przy tej wartości. W tabeli rozwiązanie jest dość oczywiste. Ale jeśli przyjrzysz się uważnie, zauważysz, że gdy x zbliża się do 3 z mniejszych liczb, wynik zmierza w kierunku 9. Jeśli wybierzesz jedyną inną możliwą ścieżkę, która jest od wyższych liczb (3.001 i wyżej) można również zauważyć, że zbiegają się one w kierunku 9. Zasadniczo, jeśli funkcja jest ciągła, ograniczenie funkcji jest równe wynikowi funkcji. Jest to definicja ciągłości w matematyce. Niestety, nie wszystkie funkcje są ładne i ciągłe, szczególnie jeśli chcesz zrobić jakieś fantazyjne efekty wodne w grze. Podczas obliczania granicy, pamiętaj, że definicja określa, że punkt p jest granicą gdy x dąży do y wtedy i tylko wtedy, gdy y znajdzie się w pobliżu x, nie wtedy i tylko wtedy, gdy y znajdzie się w pobliżu i rzeczywistej pozycji x. W związku z tym nie można twierdzić, że granica wynosi f (y). Jako dowód, weź pod uwagę równanie przedstawione na rysunku 2:

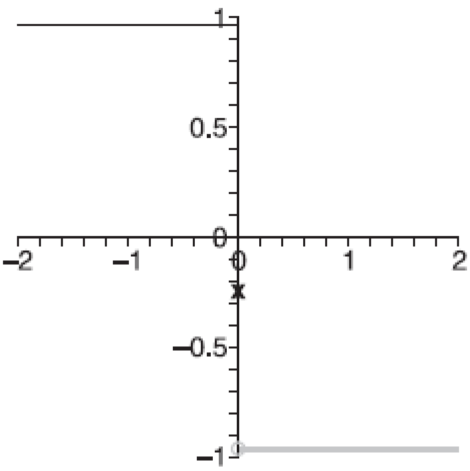
$$f(x)=\begin{Bmatrix} 1 & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{Bmatrix}$$



Na rysunku 2 pusty okrąg oznacza, że jeden konkretny punkt nie jest uwzględniony na krzywej. Z drugiej strony, wykreślenie wypełnionego punktu wskazuje, że pojedynczy punkt istnieje w tej lokalizacji. Ma to wyraźnie pokazać nieciągłość, która istnieje przy x = 0. Jest to dość bezużyteczne równanie, ale ilustruje, w jaki sposób limit różni się od wartościowanej funkcji. Tutaj, jeśli poproszono Cię o obliczenie limitu, ponieważ x dąży do 0, odpowiedź byłaby 0. Możesz to łatwo zweryfikować, ponieważ x staje się bardzo blisko 0, wartość jest nadal równa 0. W dokładnym punkcie x = 0 , prawdą jest, że funkcja ma wartość 1, ale jest to jedyny wyjątek. Nie ma nieskończonej liczby wejść, które są nieciągłe. Możliwe też, że granica w ogóle nie istnieje. Rozważ następujące równanie:

$$f(x)=\begin{Bmatrix} -1 & x>0 \\ 1 & x\leq 0 \end{Bmatrix}$$

Wykres tego równania, jak pokazano na rys. 3, pokazuje, że funkcja jest reprezentatywna dla wykresu dla linii przerywanej lub, jeśli wolisz, dwóch różnych linii

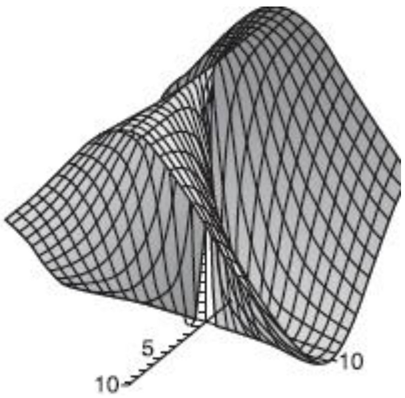


Gdybyś miał obliczyć granicę na poziomie x = 0, nie byłbyś w stanie wymyślić jednego rozwiązania. Podczas testowania granicy wokół okolic liczb ujemnych, okaże się, że wartość, która wydaje się prawdopodobna, wynosi 1. Z drugiej strony, jeśli spojrzysz z perspektywy dodatniej liczby, dowiadujesz się, że -1 to wartość . Otrzymujesz dwie różne wartości, zbliżając się do limitu z dwóch różnych ścieżek; dlatego limit nie istnieje. Limit w dowolnym punkcie powinien być zawsze unikalny. Jeśli nie jest, to powinno być jasne, że równanie nie może zbiegać się w kierunku jednej liczby. Chociaż istnieją bardzo rygorystyczne metody, które można wykorzystać do ustalenia, czy dane równanie ma pewien limit, istnieje kilka sztuczek, których można użyć do określenia tego z góry. Należy wziąć pod uwagę, że jakakolwiek funkcja ciągła posiada ograniczenie w dowolnym punkcie. Na przykład funkcja taka jak cosinus lub sinus jest ciągła; żadna z funkcji nie ma żadnych przerw, więc na każdym z nich istnieje ograniczenie. Funkcje wielomianowe są kolejnym przykładem funkcji ciągłych. Jak pokazuje powyższy przykład, funkcja nie musi być ciągła, aby posiadać ograniczenia we wszystkich lokalizacjach. W rzeczywistości, jeśli funkcja jest ciągła, następująca właściwość zawiera:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$$

Jeśli spojrzysz na pierwszy przykład, tak właśnie było. Funkcja była wielomianem, a więc jest ciągła; a ponieważ jest ciągły, limit istnieje wszędzie. Ponadto, ponieważ jest ciągły, jego limit w rzeczywistości jest równy funkcji wycenionej w y. Nie zawsze łatwo jest radzić sobie z ograniczeniami. Wiele przypadków w rachunku różniczkowym jest takich, że funkcja jest dzielona przez 0, gdy x = 0, a zatem nie można łatwo zobaczyć, co się dzieje. Rozważmy na przykład poniższe równanie, które może reprezentować wzgórze przedstawione na rysunku 4:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$



Gdybyś obliczył limit na poziomie <0, 0>, trudno byłoby określić, czy istnieje, czy nie. Jak się okazuje, możesz przejść intuicyjną metodą i wypróbować kilka wartości w pobliżu, ale to faktycznie nie gwarantuje, że limit rzeczywiście istnieje. Zwłaszcza jeśli masz do czynienia z równaniami 3D, istnieje wiele ścieżek, które możesz zastosować, by zbiegać się w kierunku y, co trudno powiedzieć z bardzo dobrą pewnością. W szczególności powyższe równanie w rzeczywistości nie ma ograniczenia. Szybkim sposobem ustalenia tego jest fakt, że równanie licznika zbiegało się wolniej niż równanie w mianowniku. Oczywiście, x^2 zbiega się szybciej niż x plus pewna liczba dodatnia.

Właściwości Granicy

Oprócz zrozumienia granic w sensie ogólnym, ważne jest również przyjrzenie się właściwościom granic. Są to rodzaje tożsamości, które pozwolą Ci zaoszczędzić czas pod koniec dnia. Ten tekst nie zadał sobie trudu udowodnienia tych tożsamości, ale powinieneś być w stanie to zrobić sam, ponieważ są to zwykłe algebraiczne manipulacje. Intuicyjnie te właściwości są całkiem jasne. Pierwsze twierdzą, że skalowana granica jest równa tej samej skali granicy funkcji. Z matematycznego punktu widzenia jest to przekazywane w następujący sposób:

$$\text{If } \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = a,$$
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{y}} \left(kf(\mathbf{x})\right) = ka$$

Druga ważna właściwość twierdzi, że suma granic jest równa granicy sumy funkcji. Z matematycznego punktu widzenia jest to przekazywane w następujący sposób:

$$\textbf{Jeśli } \lim_{x\to y} f(x) = a \quad \textbf{i} \quad \lim_{x\to y} g(x) = b$$
$$\lim_{x\to y} (f+g)(x) = \lim_{x\to y} f(x) + \lim_{x\to y} g(x) = a+b$$

Następna właściwość dotyczy mnożenia. Zasadniczo stwierdza, że mnożenie granic jest równe granicy mnożenia funkcji. Ponownie, jeśli chodzi o matematykę, jest to przekazywane w następujący sposób:

$$\textbf{Jeśli } \lim_{x\to y} f(x) = a \quad \textbf{i} \quad \lim_{x\to y} g(x) = b$$
$$\lim_{x\to y} (f\cdot g)(x) = \left(\lim_{x\to y} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to y} g(x)\right) = a\cdot b$$

Podobnie, możesz wywnioskować to samo dla odwrotności funkcji. Korzystając z zapisu matematycznego, masz następujące:

$$\textbf{Jeśli } \lim_{x\to y} f(x) = a \ne 0 \quad \textbf{i} \quad f(x) \ne 0\ \forall \mathrm{x}$$
$$\lim_{x\to y} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{b}$$

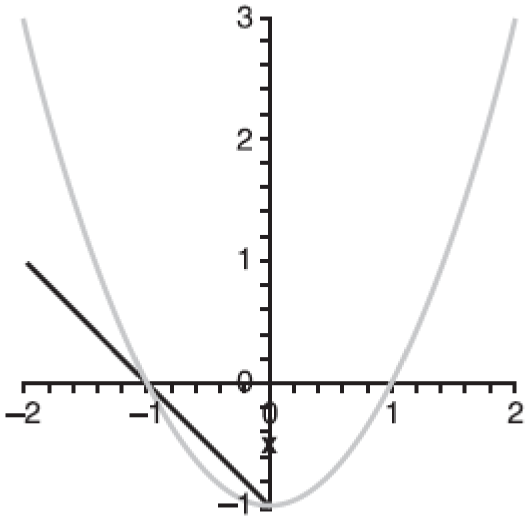
Pochodne (wynik różniczkowania)

Idea pochodnej ujmuje pojęcie tempa wzrostu. Rozważmy na przykład samochód, który porusza się liniowo i przechodzi z pozycji początkowej x = 0 do pozycji końcowej x = 3 w ciągu trzech sekund. Jak możesz ustalić, jak szybko jedzie samochód? Jeśli przyjrzysz się problemowi, zauważysz, że samochód wykonuje trzy jednostki ruchu w ciągu trzech sekund lub, mówiąc inaczej, prędkość, z jaką jedzie samochód to 3 / 3s lub 1 jednostka na sekundę. To funkcja czasu. Geometrycznie, gdybyś narysował pozycję samochodu w funkcji czasu, narysowałbyś linię prostą od jednego punktu do drugiego. Nachylenie w tym przypadku faktycznie odzwierciedla szybkość zmian. Z drugiej strony, rozważ obiekt poruszający się ruchem parabolicznym i przypuśćmy, że równanie opisujące ruch obiektu jest następujące:

$x(t) = t^2 – 1$

Aby obliczyć średnią stawkę dla zakresu t = [- 1, 0], zastosowałbyś tę samą koncepcję. W skrócie, można obliczyć nachylenie linii generowanej od pierwszego do drugiego punktu, jak pokazano na rysunku 5:

$$\frac{x(-1)-x(0)}{(-1)-0}=\frac{\left((-1)^2-1\right)-\left(0^2-1\right)}{-1}$$
$$=-1$$

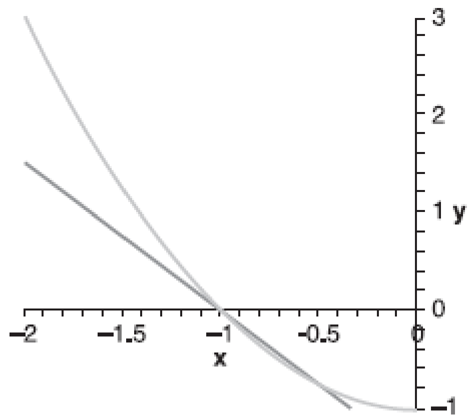


Średnia szybkość z zakresu [a, b] jest łatwo obliczana następująco, gdzie m jest nachyleniem linii od b do a:

$$m=\frac{x(b)-x(a)}{b-a}$$

Jak na razie dobrze. Zastanów się jednak, co się stanie, jeśli zmniejszysz zakres o połowę, jak pokazano na Rysunku 6:

$$\frac{x(-1)-x\left(-\frac{1}{2}\right)}{(-1)-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\left((-1)^2-1\right)-\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1\right)}{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\frac{3}{4}}{-\frac{1}{2}}$$
$$=-\frac{3}{2}$$



Nachylenie jest oczywiście bardziej strome. Oczywiście, jeśli ograniczyłeś przedział jako taki, iteracyjnie uzyskałbyś wskaźnik dla mniejszego zakresu krzywej do punktu, w którym można by powiedzieć, że obliczyłeś chwilową szybkość zmian dla danego punktu w czasie, tylko dlatego, że twój zasięg jest tak mały, że jest natychmiastowy ze wszystkich praktycznych zastosowań. To jest to samo, co może się zdarzyć podczas jazdy samochodem. Jeśli przyspieszasz w samochodzie, możesz spojrzeć na aktualną prędkość (lub prędkość chwilową). Niezwykle ważne jest ustalenie chwilowej prędkości w danym momencie. Na przykład, biorąc pod uwagę położenie obiektu, możesz być zainteresowany poznaniem początkowej prędkości lub szybkości zmiany obiektu, lub, jeśli wolisz, nachyleniem w tym momencie w danym czasie, biorąc pod uwagę wykres. Jak zaobserwowano wcześniej, odpowiada to nachyleniu w tym punkcie chwilowym, ale dokładniej, nachylenie w tym punkcie chwilowym jest w rzeczywistości nachyleniem linii stycznej na tej krzywej w czasie t (to znaczy, dla czasu = t in f (Time)). Przyjrzymy się temu dokładniej później, ale na razie spójrzmy na matematykę zaangażowaną w ciągłe zmniejszanie przedziału:

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{x(b)-x(a)}{b-a} \\
&= \frac{x(b)-x(b-h)}{h}, h = b-a
\end{aligned}
$$

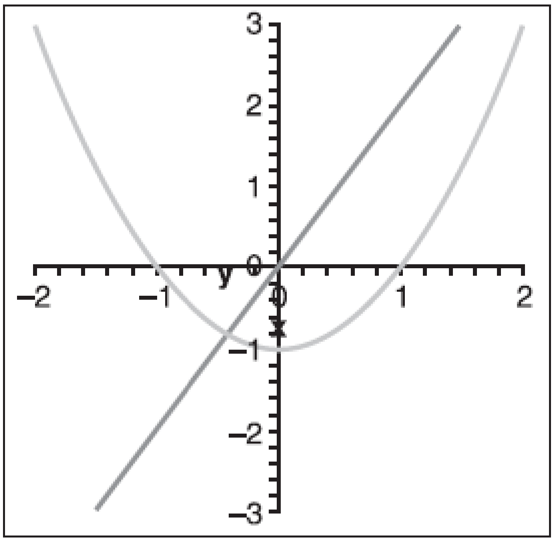
Jeśli h = 0, jasne jest, że ta funkcja równa się nieskończoności. Dowolna funkcja podzielona przez 0, poza samym sobą, jest nieskończonością. Możesz to sprawdzić, dzieląc dowolną liczbę przez coraz mniejsze liczby, które są bliskie 0. W problemie przedziałowym, w rzeczywistości nie potrzebujesz ścisłej równości do 0 dla h. Co dzieje się z tym równaniem jest to, że gdy wartość h staje się mniejsza i mniejszy podział powoduje znaczny wzrost licznika. Z drugiej strony licznik staje się również bardzo mały, gdy h staje się bardzo mały. To na pewno pachnie jak problem z limitem. Pochodną funkcji f (x) można zatem zdefiniować w następujący sposób:

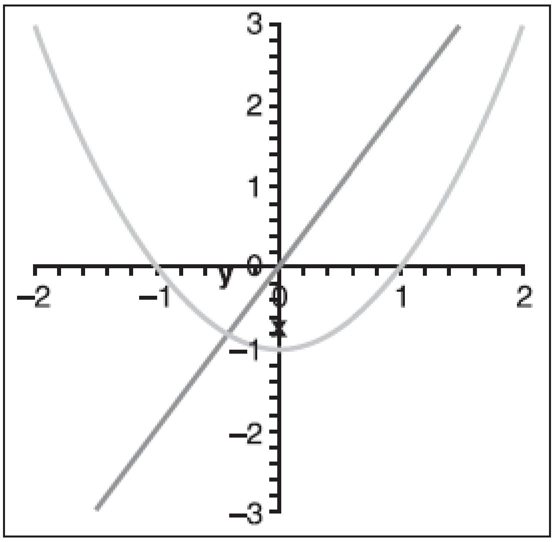
$$
f\,'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}
$$

Piszemy pochodną dodając jeden mały ścieg obok funkcji, więc rozwiązujemy dla równania próbki:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(x^2-1\right)-\left(\left(x-h\right)^2-1\right)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(x^2-1\right)-\left(x^2-2xh+h^2-1\right)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 2x+h$$
$$= 2x$$

Wykres tej funkcji przedstawiono na rysunku 7. Zasadniczo, dla x = -1, mamy chwilowe nachylenie -2, jak pokazano na rys. 8. (Możesz to sprawdzić.)





Następnie przyjrzyjmy się pochodnym dla bardziej ogólnych i dobrze znanych funkcji. Pojęcie ograniczeń jest tutaj ważne, ponieważ ograniczenia są kluczem do rozwiązania problemów, które nie mają z góry określonego rozwiązania analitycznego. Alternatywnie można obliczyć wartość liczbową limitu, wprowadzając wartości bardzo zbliżone do rozwiązania i określając wartość końcową. Tylko upewnij się, że rozumiesz jedną rzecz: Nie wszystkie funkcje mają pochodną. Jeśli limit funkcji nie istnieje, to wyraźnie nie może posiadać pochodnej. Preferowane jest przedstawienie pochodnej funkcji f (x), gdzie zmienną w funkcji jest x. Zauważ, że tutaj nie ma wzmianki o zbieżności w kierunku określonej wartości. To, co cię szczególnie interesuje, to ogólna funkcja, w której y zbiegają się w kierunku x ogólnie. Krótko mówiąc, chcesz uzyskać równanie pochodnej, a nie wartość pochodnej w określonym punkcie. Możesz napisać to z następującą notacją:

$$f'(x) = \frac{d\left(f\left(x\right)\right)}{dx}$$

Pochodne wielomianowe

Wielomiany są bardzo popularne z wielu powodów. W związku z tym przydatne może być uogólnienie pochodnej wielomianu, aby można ją było łatwo obliczyć. Jeśli używasz definicji pochodnej jako limitu funkcji, możesz łatwo znaleźć limit wielomianu:

$$\begin{aligned}\frac{d\left(x^n\right)}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{x^n-\left(x-h\right)^n}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^n-x^n+nx^{n-1}h+h^2\left(\ldots\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+h^2\left(\ldots\right)\right)\\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

Jest trochę za wcześnie, aby poznać szczegóły rozszerzenia wielomianu (x + a) n, ale chodzi o to, że jeśli pomnożysz dwumianowy n razy, otrzymasz tylko jedną wartość, w której a nie jest pomnożona przez x. Dzieje się tak, gdy mnożysz pierwszy termin (czyli x) dla każdego nawiasu. Jeśli spojrzysz na ile haseł ma moc 1 dla h, zauważysz, że jest ich n i że wszystkie z nich mają tę samą wartość: xn? 1. Jeśli chodzi o pozostałe warunki, każdy ma co najmniej moc h do kwadratu. Dlatego możesz podzielić całą rzecz przez h i, ponieważ nadal istnieje wiodący współczynnik h dla każdego z tych terminów, ponieważ h dąży do 0, równanie równe jest 0. Tak więc masz pozostały okres (ten, który kumuluje wszystko uprawnienia 1 dla h). Po tym masz szansę, że będziesz mnożył przez h, co jest intuicyjne 0. Dzięki właściwościom limitu ta formuła uogólnia się jeszcze bardziej, ponieważ możesz zastosować to samo do sum wielomianów i do skalarnych multiplikacji wielomianów . W skrócie można zastosować tę technikę do rozwiązania równania dowolnego zwykłego wielomianu rzeczywistego.

Tajemnicza moc

Wielomiany obejmują szeroki zakres problemów, ale nie są jedynymi dziećmi w bloku. Inną powszechną funkcją jest funkcja mocy. Chociaż funkcja ta jest bardzo podobna do funkcji wielomianowych w reprezentacji, sama funkcja jest zupełnie inna i ogólnie wzrasta / maleje znacznie szybciej niż wielomian. Chcemy znaleźć równanie dla ogólnej funkcji mocy, więc zacznijmy od podstaw:

$$\begin{aligned}\frac{d\left(e^x\right)}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{e^x-e^{x-h}}{h}\\ &= e^x\lim_{h\to 0}\frac{1-\frac{1}{e^b}}{h}\end{aligned}$$

Oto, gdzie robi się trochę trudniej. Tak na szybko wygląda na to, że tej funkcji nie można przekonwertować, aby pozbyć się podziału przez h, ale zwykłe zastąpienie kilku wartości w pobliżu 0 sugeruje, że może istnieć ograniczenie. Z silniejszą definicją limitu (zwaną "limit"). epsilon delta "), można pokazać, że ostatni limit tutaj zbiega się w kierunku 1. Numerycznie, możesz sprawdzić, czy tak jest, próbując bardzo małych wartości. Implikacja tego jest następująca:

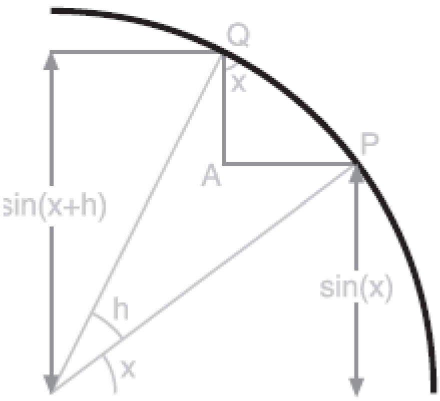
$$\frac{d\left(e^x\right)}{dx} = e^x$$

Co więcej, dzięki właściwościom pochodnych, które zostaną wkrótce rozwiązane, możesz również powiedzieć, że ogólnie dla każdej mocy a, posiada:

$$\frac{d\left(a^x\right)}{dx} = \ln\left(a\right)e^x$$

Radzenie sobie z pochodnymi funkcji trygonometrycznych to zupełnie inna bestia. Podstawowe pojęcie ograniczeń jest łatwe; to małe sztuczki, które musisz wykonać, aby uwolnić równanie nonsensu, takie jak podziały o 0, które utrudniają. Aby zilustrować działanie pochodnych funkcji sinusoidalnych, wybrałem podejście geometryczne, ponieważ rozwiązywanie tych funkcji w sposób algebraiczny może być trudne. Sztuką jest zrobić mały szkic i zobaczyć, jakie relacje istnieją. Na przykład narysuj okrąg z następującymi punktami: pochodzenie, o; punkt grzechu (x), p; i punkt grzechu (x + h), q. Następnie zdefiniuj punkt a jako wewnętrzny róg trójkąta prostokątnego utworzonego przez p i q, jak pokazano na rysunku 9. Z matematycznego punktu widzenia masz następujące:

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\sin\left(x\right)\right)}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(x\right)-\sin\left(x-h\right)}{h}\\ &= \frac{aq}{\text{arc } pq}\\ &\approx \frac{aq}{pq}\\ &= \cos\left(x\right)\end{aligned}$$



To dość trudny akt żonglerski. W radianach długość łuku koła jednostkowego odpowiada wartości kąta. Dlatego koło jednostkowe ma obwód 2π , co stanowi 360 stopni. To powinno wyjaśnić pierwszą / drugą linię. W trzecim wierszu dokonuje się przybliżenia. Logika w tym punkcie jest taka, że gdy h dąży do 0, łuk pq będzie zmierzać w kierunku linii prostej. Zasadniczo, jeśli powiększysz nieskończoność na okręgu, pojawi się ona jak linia prosta. Jest tak dlatego, że w dawnych czasach wierzyli, że Ziemia jest płaska i nie jest sferyczna (oczywiście z niewielką presją biblijną). Dwie ostatnie linie zasadniczo zawierają definicję kosinusa i samego siebie; w tym momencie jest to tylko definicja.

Pochodne w 3D i poza

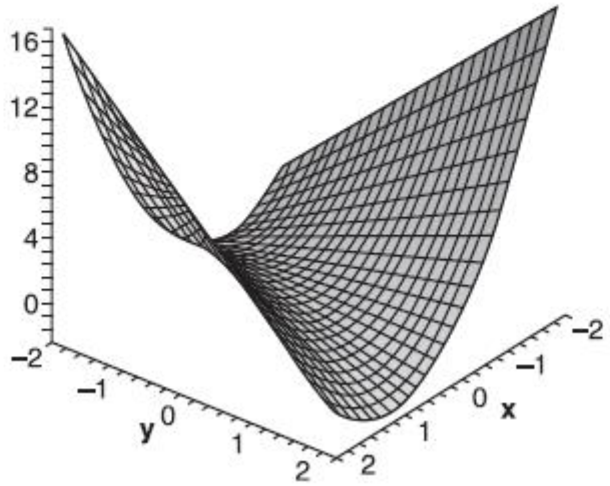
Do tej pory widziałeś funkcje, które zajmują się tylko jedną zmienną, a więc były równaniami, które można uznać za funkcje 2D. Mogłeś pomyśleć, że to dziwne, że tytuł tego rozdziału to "Przyspieszony rachunek wektorowy dla niewtajemniczonych"; cóż, nie zastanawiaj się dłużej. Wszystkie poprzednie równania można zapisać jako wektory, co czyni to znacznie prostszym w manipulowaniu równaniem o wyższych wymiarach. Po zrozumieniu pojęcia pochodnych 2D jednym z najprostszych pojęć do zrozumienia jest pojęcie pochodnych cząstkowych. Ideą stojącą za nimi jest zastosowanie pochodnej do całej funkcji względem danej zmiennej. Innymi słowy, jeśli masz funkcję f (x, y, z), pochodna cząstkowa rozróżniłaby funkcję dla x, biorąc pod uwagę wszystkie pozostałe zmienne jako stałe. Następnie zrobiłoby to samo dla y i z. (Nie różni się to zbytnio od tego, co widzieliście wcześniej.) Matematycznie można powiedzieć o pochodnych cząstkowych:

$$\frac{d\left(f\left(\mathbf{x}\right)\right)}{dx_i} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\mathbf{x}\right) - f\left(\mathbf{x}-\mathbf{h}\right)}{h}, \mathbf{h} = \left\langle \begin{matrix} 0 & i = j \\ h & i \neq j \end{matrix} \right\rangle = \left\langle 0, \ldots, h \ldots, 0 \right\rangle$$

W skrócie, musisz wygenerować h tak, że i-ten składnik jest równy h, a wszystkie pozostałe komponenty równe 0. Jako przykład zilustrowany na rysunku 10:

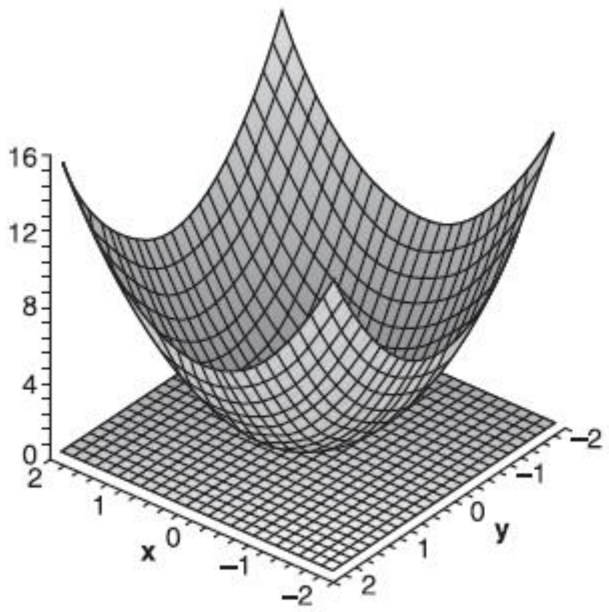
$$f\left(x, y\right) = 2x^2 - 2xy$$

$$\frac{d\left(f\left(x, y\right)\right)}{dx} = 4x - 2y$$



W jaki sposób pomaga to rozszerzyć wszystko na 3D? Cóż, w 2D, pochodna reprezentuje linię styczną w punkcie x. W 3D pochodna, która przyjmuje dwie zmienne i wyprowadza jedną, powinna logicznie uzyskać styczną płaszczyznę do powierzchni opisanej przez funkcję, jak pokazano na rysunku 11. Logicznie rzecz biorąc, pochodna x powinna przedstawiać nachylenie x; Podobnie pochodna i nachylenie w y. W konsekwencji nachylenie <x, y, z> dla płaszczyzny stycznej można zapisać za pomocą pochodnych cząstkowych w następujący sposób:

$$\mathbf{m} = \nabla f\left(\mathbf{x}\right) = \left\langle \frac{df\left(\mathbf{x}\right)}{dx}, \frac{df\left(\mathbf{x}\right)}{dy}, \frac{df\left(\mathbf{x}\right)}{dz} \right\rangle$$



Być może zastanawiasz się, w jaki sposób możesz obliczyć normalny wektor tej powierzchni, jeśli w równaniu nie ma z, ale tak naprawdę jest z. Jeśli weźmiemy przykład z rysunku 11, równanie f (x, y) = 2x2 + 2y2 jest tak naprawdę to samo co z = $2x^2$ + 2y2 lub 0 = $2x^2$ + 2y^{-} z, co oznacza, że normalny wektor byłby w rzeczywistości <4x, 4y,-1>. Obliczanie normalnego wektora może być bardzo przydatne, gdy przychodzi czas, aby oświetlić swoją scenę. Jest to często określane jako gradient funkcji. Możesz myśleć o gradiencie jako nachyleniu powiązanym z każdym komponentem. Aby określić równanie płaszczyzny w tym miejscu, możesz po prostu zastąpić punkt, który znasz na płaszczyźnie (np. X) w równaniu samolotu. W skrócie, otrzymujesz następujące informacje:

$$z = f\left(x_0, y_0\right) + \left(\frac{df\left(x_0, y_0\right)}{dx}\right)\left(x - x_0\right) + \left(\frac{df\left(x_0, y_0\right)}{dy}\right)\left(y - y_0\right)$$

Wnikliwa osoba również wymyśliłaby, że jest to równanie płaszczyzny używającej kwaternionu lub, jeśli wolisz patrzeć w ten sposób na wektor i przesunięcie. Rzeczywiście można tu wyrazić równanie płaszczyzny stycznej za pomocą kwaternionu. Jak się okazuje, gradient jest normalny, który reprezentuje normalny wektor do płaszczyzny. Równanie to nie powinno dziwić, ponieważ jest bardzo zbliżone do równania linii stycznej, która jest podana poniżej:

$$y = f\left(x_0\right) + \left(\frac{df\left(x_0, y_0\right)}{dx}\right)\left(x - x_0\right)$$

Co się stanie, jeśli równanie nie zostanie odwzorowane na jedną rzeczywistą liczbę? Na przykład załóżmy, że chcesz obliczyć pochodną obrotu. Rotacja odwzorowuje współrzędne na inną współrzędną, a nie na pojedynczą wartość. Jednym z rozwiązań jest zredukowanie go do postaci parametrycznej i zrobienie tego z tego miejsca. Tutaj, po prostu zapewniam lepszy sposób reprezentowania tego wszystkiego, używając znanej notacji macierzy. Jeśli twoja funkcja ma równania parametryczne, poniższa macierz pomoże ci obliczyć pochodną:

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{df_1(\mathbf{x})}{dx_1} & \cdots & \frac{df_1(\mathbf{x})}{dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_m(\mathbf{x})}{dx_1} & \cdots & \frac{df_m(\mathbf{x})}{dx_n} \end{bmatrix}$$

Dla każdej transformacji liniowej jest to niezwykle proste, ponieważ transformacja liniowa może być zapisana w postaci macierzy Ax. Jeśli obliczysz pochodną tego, x = <1, ... 1>, więc odpowiedź jest A. Możesz także obliczyć pochodną dla bardziej złożonych transformacji, jak pokazano w następującym przykładzie:

$$f(x,y) = \langle 2x+3y, 2x^2y \rangle$$

$$\mathbf{D}(f(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{f(x,y)}{dx} & \frac{f(x,y)}{dy} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d\frac{2x+3y}{dx} & d\frac{2x+3y}{dy} \\ d\frac{2x^2y}{dx} & d\frac{2x^2y}{dy} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4xy & 2x^2 \end{bmatrix}$$

Właściwości i reguły pochodnej

Podobnie jak limit, pochodna ma również zestaw właściwości, które można wykorzystać do uproszczenia zadania. Niektóre są oczywiste, inne nie. Wszystkie są manipulacjami algebraicznymi, co oznacza, że ich dowody są w większości przypadków nudne i czasami mogą być nieprzyjemne, ponieważ używają właściwej definicji limitu w zakresie delty epsilon, co nie jest użyteczne dla gry i tak. Z drugiej strony, te właściwości są dość ważne i przydatne do rozwiązywania równań, które zazwyczaj są trudne do obliczenia, więc przejdźmy do nich.

Reguła łańcucha

Pierwsza z nich jest powszechnie nazywana regułą łańcuchową i jest niezwykle użyteczna, ponieważ pozwala na obliczanie równań w innych równaniach. Kombinacja równania w równaniu jest zapisana za pomocą pustej kropki, jak pokazano tutaj:

$$f(g(\mathbf{x})) = (f \circ g)(\mathbf{x})$$

Reguła łańcuchowa stwierdza, że pochodna połączonego równania jest równa pochodnej funkcji pomnożonej przez pochodną jej funkcji wewnętrznej. Matematycznie wyraża się to następująco:

$$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}) = \mathbf{D}f\left(g(\mathbf{x})\right)\mathbf{D}g(\mathbf{x})$$

To może wydawać się nieco skomplikowane, więc spójrzmy na wersję 2D tej funkcji:

$$f(y) = 2y^2 + 3$$
$$g(x) = y = -4x$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= \frac{d\left(2(-4x)^2 + 3\right)}{dx} \cdot \frac{d(-4x)}{dx} \\ &= (-16x) \cdot (-4) \\ &= 64x\end{aligned}$$

Brzmi to dość przerażająco, ale jak widać, nie jest tak źle. Możesz to sprawdzić rzeczywiście prawidłowe rozwiązanie, najpierw zastępując g na f, a następnie obliczając pochodną stamtąd. Powinieneś otrzymać dokładnie to samo rozwiązanie.

Reguła iloczynu

Reguła łańcucha może pomóc rozwiązać wiele problemów, ale nie wszystkie. Zastanów się, jak znajdziecie pochodną produktu funkcji. Reguła łańcucha nie może ci pomóc tutaj; chyba że funkcję można łatwo wyrazić w jednym z innych typów instrumentów pochodnych, trudno będzie rozwiązać ten problem. To oczywiście wymaga reguły, która może pomóc w ustaleniu produktu dwóch funkcji. Na szczęście taka reguła istnieje: zasada produktu. Matematycznie reguła ta wyraża się następująco:

$$\mathbf{D}\left(f(\mathbf{x}) \cdot g(x)\right) = \mathbf{D}\left(f(\mathbf{x})\right)g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})\mathbf{D}\left(g(\mathbf{x})\right)$$

Aby to zrozumieć, spójrz na następujące:

$$f(x) = 2x^2 + 3$$
$$g(x) = -4x$$

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\left(2x^2+3\right)(-4x)\right)}{dx} &= \frac{d\left(2x^2+3\right)}{dx}(-4x) + \left(2x^2+3\right)\frac{d(-4x)}{dx} \\ &= (4x)(-4x) + \left(2x^2+3\right)(-4) \\ &= -16x^2 - 8x^2 - 12 \\ &= -24x^2 - 12\end{aligned}$$

Zasadniczo reguła łańcucha upraszcza twoje życie. Jednym ze sposobów podejścia do problemu byłoby obliczenie końcowego równania. Załóżmy na przykład, że masz dwa równania: jeden do wygenerowania terenu i drugi do przetłumaczenia terenu. Drugie równanie jest w rzeczywistości funkcją funkcji, a zatem idealnie pasuje do reguły łańcucha. Równanie terenu to f (x), a translacja będzie g (x), która jest ostatnią transformacją zastosowaną. Oczywiście możesz zastosować ten pomysł rekursywnie. Tak więc, jeśli miałeś transformację skalowania

Reguła Ilorazu

Ostatnią ważną właściwością, którą można wykorzystać, jest reguła ilorazu. Jest to wyrażone w następujący sposób:

$$\mathbf{D}\left(\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}\right)=\frac{\mathbf{D}(f(\mathbf{x}))g(\mathbf{x})-f(\mathbf{x})\mathbf{D}(g(\mathbf{x}))}{g^2(\mathbf{x})}$$

Ponieważ reguła łańcucha i reguła iloczynu zostały wyjaśnione tylko w kontekście 2D funkcje, a ponieważ reguła produktu jest podobna do reguły ilorazu, użyjmy przykładu w wyższym wymiarze tutaj:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$
$$g(x,y,z)=3x^2-1$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\left(\frac{f(x,y,z)}{g(x,y,z)}\right)&=\frac{g(x,y,z)\mathbf{D}(f(x,y,z))-f(x,y,z)\mathbf{D}g(x,y,z)}{g^2(x,y,z)}\\&=\frac{(3x^2-1)\langle 2x,2y,2z\rangle-(x^2+y^2+z^2)\langle 6x,0,0\rangle}{(3x^2-1)^2}\\&=\frac{\langle 6x^3-2x-(x^2+y^2+z^2)6x,6yx^2-2y,6zx^2-2z\rangle}{(3x^2-1)^2}\\&=\frac{\langle -2x-6xy^2-6xz^2,6yx^2-2y,6zx^2-2z\rangle}{(3x^2-1)^2}\end{aligned}$$

Tam to masz. Nie najładniejsze równanie, na które można liczyć, ale to wszystko sprowadza się do. Te trzy ważne właściwości w połączeniu z kilkoma podstawowymi pochodnymi powinny pomóc w rozwiązaniu większości problemów związanych z rachunkami, które napotkasz podczas programowania gier. Rozważ te zasady jako skróty podczas obliczania pochodnej równania. Nie zapomnij przyjrzeć się Dodatkowi C dla innego zestawu ciekawych pochodnych, które pomogą ci rozwiązać różne problemy. Z drugiej strony, jeśli masz kopię klonu pod ręką, zawsze możesz przejść do tego, aby uzyskać pochodne podstawowych równań.

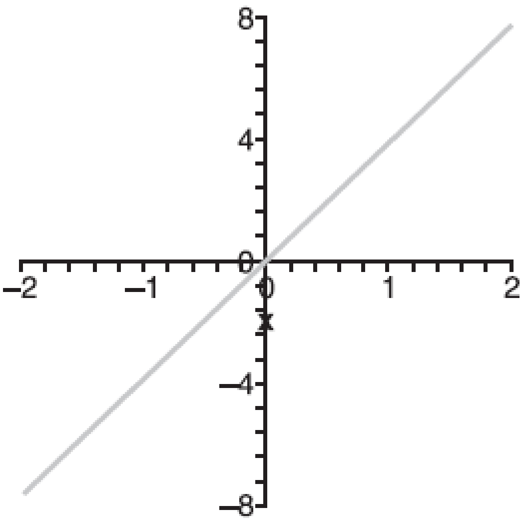
Rozwiązywanie problemów za pomocą funkcji 3D i poza nią

Widzieliście, że pochodna reprezentuje styczną hiperpłaszczyznę na funkcji. Jak to się ma do programowania gier? Pochodna jest narzędziem, za pomocą którego można rozwiązywać bardziej złożone problemy, ponieważ umożliwia obliczanie minimów i maksimów. (Te dwa zbiory współrzędnych określa się jako ekstrema.) Będziesz mieć wiele okazji do korzystania z rachunku różniczkowego w dalszej części, więc przyjrzyjmy się, jak to zrobić. Zacznijmy od funkcji 2D przed przejściem na wyższe poziomy. Rozważmy prosty wykres 2D - powiedzmy, wielomian y = 2x2. Co jest specjalnego w minimum na tej krzywej? Po pierwsze, jest to najniższy punkt, ale naprawdę interesującym faktem jest to, że linia styczna w tym miejscu jest pozioma. Z technicznego punktu widzenia oznacza to, że nachylenie wynosi 0, i kurtka, wiesz jak obliczyć nachylenie! Rozwiązując równanie $y = 2x^2$, znajdziesz następujące:

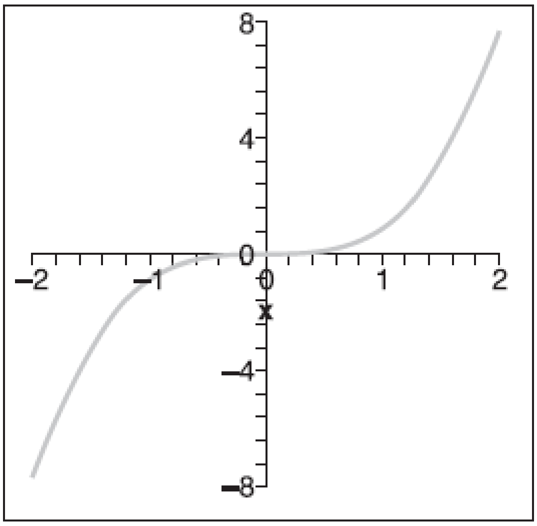
$$
\begin{aligned}
y &= 2x^2 \\
y' &= 4x \\
0 &= 4x \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Przekonasz się, że maksimum znajduje się w punkcie x = 0, co dodatkowo potwierdza wykres. W rzeczywistości wykres na rysunku 5 jest nieco podobny do tego, który został tutaj wygenerowany. Zwróć uwagę, że tłumaczenie w y nie zmienia pozycji najniższego punktu na x. To jest świetne, ale może być dość nieprzyjemne. Aby to zilustrować, załóżmy, że masz wielomian z dość wysokim stopniem. Po obliczeniu pochodnej należy rozwiązać jej zera. Załóżmy na przykład, że masz bardziej złożone równanie, takie jak funkcja cosinus, w której nie jest jasne, czy nachylenie zerowe jest wartością maksymalną czy minimalną. Oba mają nachylenie równe 0, więc potrzebujesz jakiegoś sposobu rozróżnienia między nimi. Nie powinno to być zbyt trudne, jeśli spojrzysz na wykres derywatywny, jak pokazano na rysunku 12. Tam, zauważ, że od lewej do prawej wartość zmienia się z dodatniej na ujemną, gdy masz maksimum i odwrotnie, gdy mieć min. Jeszcze bardziej atrakcyjną właściwością jest to, że linia styczna co najmniej jest taka, że nachylenie linii stycznej jest większe niż 0. Odwrotnie, dla linii stycznej ma nachylenie mniejsze niż 0. W związku z tym można wywnioskować z tego, że następujące właściwości posiada:

$$
f'(\mathbf{x}) = 0, \text{then } f''(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} < 0 & \text{lokalne minimum} \\ > 0 & \text{lokalne maksimum} \end{Bmatrix}
$$



Zasadniczo patrzysz na pochodną pochodnej, potocznie zwaną pochodną drugiego rzędu. Można go traktować jako funkcję nachylenia funkcji nachylenia funkcji. Jeśli wolisz, możesz po prostu spojrzeć na to jako przyspieszenie oryginalnej funkcji. Innym sposobem patrzenia na to jest zmiana zmiany zmiennej. W przypadku samochodu byłoby to przyspieszenie, które jest tak naprawdę prędkością zmiany prędkości lub, bardziej precyzyjnie, szybkości zmiany tempa zmiany pozycji. Co się stanie, jeśli pochodna drugiego rzędu wynosi 0? Czy powinno to być maksimum, minimum, czy coś innego? Możesz to zaobserwować za pomocą równania f (x) = x^3; dzieje się to przy x = 0, pokazanym na rysunku 13. Ta lokalizacja nazywa się punktem przegięcia, i jest to dokładny punkt, w którym nachylenie zmienia się z dodatniego na ujemne. Wynika to z faktu, że przyspieszenie jest równe 0.



Jako przykład rozważ przypadek, w którym chcesz znaleźć minimum funkcji - na przykład, aby zoptymalizować wykorzystanie gotówki AI SimCity:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= x^2+3y^2+2xy \\
\mathbf{D}(f(x,y)) &= [2x+2y \quad 2x+6y] \\
\mathbf{D}(f(0,0)) &= [x+y \quad x+3y] \\
x+y &= 0 \\
x+3y &= 0 \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{D}(\mathbf{D}(f(x,y))) = \begin{bmatrix} \frac{d(2x+2y)}{dx} & \frac{d(2x+2y)}{dy} \\ \frac{d(2x+6y)}{dx} & \frac{d(2x+6y)}{dy} \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{D}(\mathbf{D}(f(0,0))) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}
$$

Pochodne drugiego rzędu są wszystkie dodatnie, a macierz jest dominująca po skosie (to jest, terminy na przekątnej {2, 6} są większe niż pozostałe terminy w tym samym wierszu i kolumnie), a więc punkt <0, 0 > jest maksimum. (Możesz jednak zapomnieć o tym opisie, ponieważ wkrótce otrzymasz lepszy.) Wyciągnąłem szybko i poszedłem prosto do 3D, aby pokazać, że koncepcja obejmuje także 3D. Jedynym haczykiem, kiedy to robisz, jest to, że możesz szybko uzyskać wiele równań. Przy każdym przejściu mnożymy liczbę równań przez liczbę zmiennych, dzięki czemu wszystko może szybko wymknąć się spod kontroli, ale działa. Jest to dobry przykład, gdy matryca matrycy może być użyteczna. Niestety, wizualna reprezentacja takiej koncepcji nie jest bardzo dobra na papierze. Jakoś coś wygląda nie tak w ostatnim równaniu. Podczas ostatniego kroku otrzymujesz cztery równania (z powodu macierzy 2x2), ale test, który posiadasz dla maksimum / minimum, ma zastosowanie tylko do pojedynczej rzeczywistej wartości. Aby poprawnie ukończyć problem, musisz obliczyć macierz heskiego. W skrócie, te same reguły różnicowania, które wcześniej stosowano, ale sposób obliczania rzeczywistej liczby pochodnej drugiego rzędu jest inny. Ta sama logika oznacza, że macierz jest określona pozytywnie. Możesz napisać po hebrajsku w następujący sposób:

$$H\left(f\left(x,y\right)\right)(\mathbf{h})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}h_1 & h_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{d^2f}{dx^2} & \dfrac{d^2f}{dydx}\\ \dfrac{d^2f}{dxdy} & \dfrac{d^2f}{dy^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}$$

Oooo. Nic dziwnego, że nie rozszerzyłem tego w rozdziale 3! Jest wiele matematycznych tło za tym, co nie jest konieczne do naszych celów, ale w skrócie, macie na uwadze tylko matrycę, ponieważ to ona dyktuje znak. Rozważmy tylko macierz hessjańska . Jest to zdecydowanie określone, jeśli

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$
$$\det\mathbf{H}=ad-bc>0$$

Tak więc, jeśli wrócisz do przykładu, 2 • 6 - 2 • 2> 0, możesz powiedzieć, że macierz jest dodatnia. W związku z tym możesz również powiedzieć, że <0, 0> jest maksymalne, ponieważ a> 0. Jeśli <0, oznacza to minimalne. Być może teraz rozumiesz, dlaczego macie dominującą diagonalnie matrycę, że macierz jest pozytywnie określona. Wyposażony w tę wiedzę, będziesz w stanie znaleźć szczyt góry w terenie. Tylko pamiętaj (i pamiętaj też o swojej sztucznej inteligencji), że jest to strategiczne miejsce dla niemal każdej gry opartej na żołnierzach.

Klasa funkcji

Funkcje można kategoryzować w klasach. Funkcja klasy C^0 jest funkcją, z którą kończą się końce każdej części. Jeśli wolisz, jest to funkcja ciągła. Podobnie funkcja klasy C^1 jest funkcją, której pochodna jest ciągła, i tak dalej, i tak dalej. Przez rozszerzenie można zdefiniować funkcję klasy C^n, dla której n-ta pochodna jest ciągła.

Odwrotność : całkowanie

Kiedy patrzysz na funkcję, dobrze jest spojrzeć na jej odwrotność - w tym przypadku całkę funkcji. Odwrotność, jak zawsze, jest bestią, z którą należy się liczyć. Całka jest rzeczywiście odwrotnością pochodnej. Geometrycznie pochodną jest nachylenie lub chwilowa prędkość nachylenia w danej lokalizacji. Odwrotnie, całka jest geometrycznie zdefiniowana jako obszar pod krzywą. Na przykład, jeśli masz funkcję, która dawała ci prędkość w funkcji czasu, możesz obliczyć przyspieszenie, różnicując równanie, ale możesz także obliczyć całkowity dystans poprzez całkowanie.

Numeryczne obliczanie całek

Obliczenie całki może być dość trudne, głównie dlatego, że może to zrobić krzywizna stać się dość skomplikowanym. Może się również zdarzyć, że po prostu nie masz pełnego zestawu wartości. Na przykład pomyśl o grze wyścigowej. Jesteś w skradzionym samochodzie, który żłopie gaz tak szybko, jak Homer zużywa pączki. Musisz śledzić zużycie gazu, ale wszystko, co masz, to ilość gazu, którą spalasz jako funkcję przebiegu i prędkości. To oczywiście wymaga zintegrowania stawki. Zacznijmy od podejścia numerycznego. Załóżmy, że otrzymałeś krzywą i chcesz obliczyć obszar pod krzywą:

$$f(x) = 2x$$

$$Area = \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$

Aby obliczyć obszar, można podzielić krzywą na n prostokątów, każdy o szerokości delta x i wysokości takiej, że osiąga on wierzchołek krzywej. Stamtąd zsumujesz obszar prostokątów. Oczywiście jest to przybliżenie, ponieważ jeśli zdecydujesz się użyć tylko dwóch prostokątów, twoje przybliżenie nie będzie zbyt dobre. Z drugiej strony, jeśli używałbyś wielu prostokątów, uzyskałbyś całkiem dokładny wynik. (I tak, jeśli myślisz w kategoriach ograniczeń i pozwalasz dążyć do nieskończoności, masz analityczne rozwiązanie dla całki.) Zanim przyjrzymy się rozwiązaniom analitycznym, udoskonalmy rozwiązanie numeryczne, ponieważ nie wszystkie funkcje mogą być analitycznie obliczone, a ponieważ jest dużo pracy, możesz wykonać numerację, aby poprawić przybliżenie. Jednym z najłatwiejszych do zrozumienia i obliczenia jest suma trapezów. Kluczem do sumy trapezowej jest krawędź, dla której wybierasz wysokość prostokąta. Jeśli wybierzesz prawą krawędź, która będzie wysokością poziomą, możesz uzyskać wyższą wartość niż w przypadku wyboru lewej krawędzi i na odwrót. Tak więc sztuczka polega na obliczeniu średniej z dwóch. Matematycznie, co następuje:

$$\text{Suma Riemanna} \approx \text{ Pole } = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \right)$$

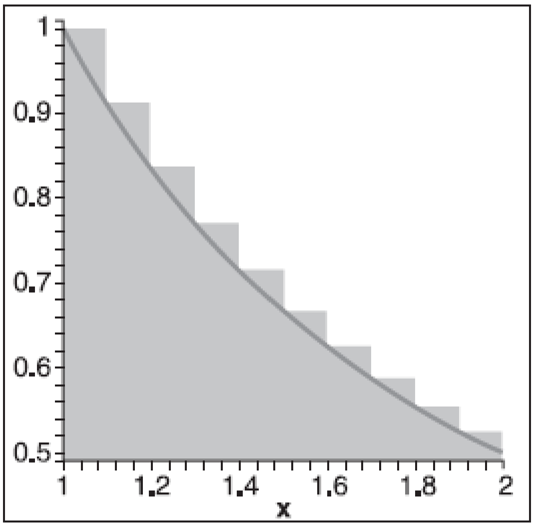
To nie jest zły pomysł, ale prosty. Na przykład obliczyć obszar funkcji 1 / t przy n = 10 i zakresie [1, 2]. Ponieważ masz 10 interwałów, każdy będzie miał szerokość 0,1. Obliczenie sumy dla lewej (Rysunek 14), prawej (Rysunek 15) i średniej krawędzi (Rysunek 16) daje:

$$\text{Lewy Brzeg } \left(1 + \frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{1}{1.9}\right)0.1 \approx 0.7188$$

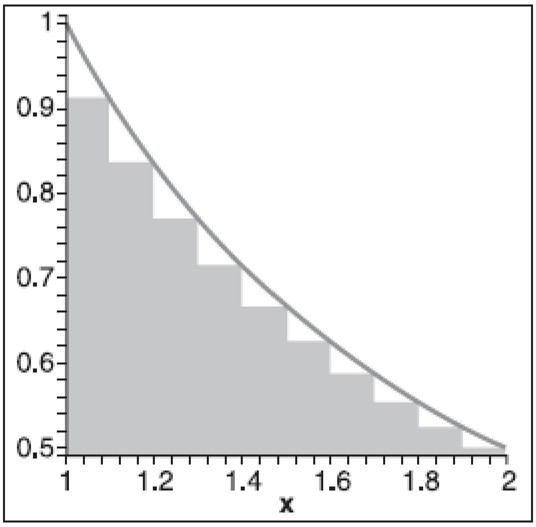
$$\text{Prawy Brze } = \left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{1}{1.9} + \frac{1}{2}\right)0.1 \approx 0.6688$$

$$\text{Pole Trapezoidu} = \frac{1}{2}(0.7188 + 0.6688)$$

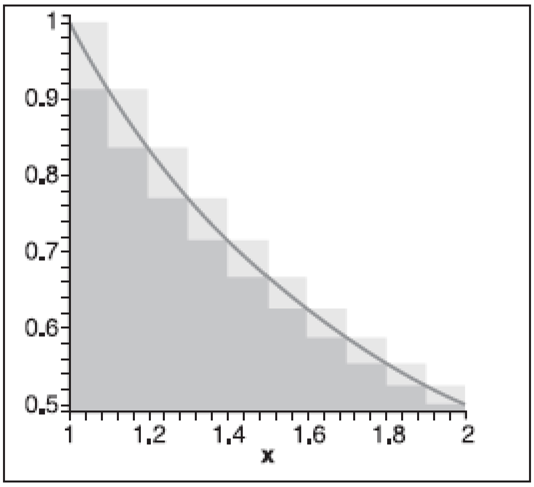
$$= 0.6938$$



14



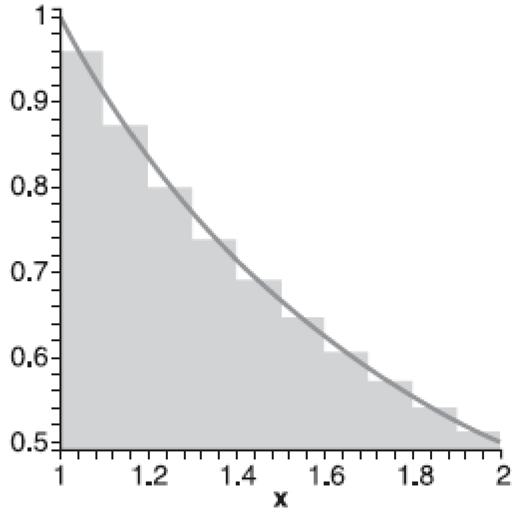
15



16

Jak widać, w zależności od funkcji, metoda lewa lub prawa będzie generalnie przeceniania, co oznacza, że dajesz więcej gazu graczowi, niż naprawdę potrzebuje. Inną wartościową metodą jest suma Riemanna (zwana również metodą punktu środkowego), która przyjmuje inne podejście. Zamiast uśredniania (lub obliczania obszaru trapezu), wybiera środek przedziału, jak pokazano na rys. 7.17, i rozciąga się o połowę odstępu po lewej i prawej stronie, zmniejszając w ten sposób odpowiedni lewy i prawy błąd o co najmniej połowę . Dla tej techniki obliczanie obszaru jest również bardzo proste. Mając na uwadze ten sam przykład, obowiązuje:

$$\text{Pole Obszaru Środkowego} = \left(\frac{1}{1.05} + \frac{1}{1.15} + \cdots \frac{1}{1.85} + \frac{1}{1.95} \right) 0.1 \approx 0.6928$$



Ta metoda, z drugiej strony, nie docenia, co oznacza, że faktycznie oszukujesz gracza z gazu bez jego wiedzy. Kiedy się zorientuje, z pewnością będzie chciał do ciebie wrócić. Czy to jest najlepsze, co możemy zrobić? Nie do końca. Jedną z najbardziej dokładnych numerycznie metod jest metoda Simpsona. Dokładna analiza tych dwóch metod pokaże, że metoda trapezoidalna jest generalnie dwa razy mniej dokładna od sumy Riemanna, ale z przeciwnym znakiem od "prawdziwej" wartości. Oznacza to, że gdy jeden przecenia, drugi nie docenia. Jest to interesujące, ponieważ można ponownie użyć metody punktu środkowego, po prostu uśredniając dwie metody. Ponieważ trapez jest zwykle około dwa razy mniej dokładny, jednak wykonuje się średnią ważoną, przypisując dwukrotność ważności innej metody w porównaniu do metody trapezoidalnej. W sumie obowiązuje następująca formuła:

Pole Simpsona = 2 Punkty Środkowe + Trapezoid / 3

Zauważ również, że obszar jest podpisany. Jeśli przejdziesz pod osią poziomą, zbierzesz ujemny obszar, podczas gdy przeciwnie zbierzesz dodatni obszar. Jest to właściwie pożądany efekt, ponieważ można łatwo obliczyć obszar pod dwiema krzywymi, po prostu odejmując podpisany obszar między dwiema krzywymi - coś, czego nie można zrobić bez podpisanego obszaru. Z drugiej strony, jeśli naprawdę patrzysz na obszar bez znaków, nic nie powstrzyma Cię przed wprowadzeniem wartości bezwzględnej.

Analityczne całki

Odwracanie równania może stać się bardzo nieprzyjemne, jeśli myślisz o połączeniu reguła łańcucha, reguła produktu i podobne funkcje. Podobnie integracja może stać się koszmar. Jeśli możesz zrobić to numerycznie, zrób to; jeśli potrzebujesz rozwiązania analitycznego do celów czasu rzeczywistego, czytaj dalej. Jeśli możesz wymyślić równanie analityczne, które precyzyjnie określa ilość użytego gazu, możesz zintegrować funkcję całkową i całkowicie zapomnieć o obliczaniu całkowitego zużycia gazu za pomocą próbek. Całka jest przeciwpochodna (odwrotna). Załóżmy, że wykreśliłeś funkcję i jej pochodną. Na drugim wykresie (pochodna) wysokość przedstawia nachylenie w tej właśnie lokalizacji. Ponieważ ten wykres daje prędkość, wiesz, że przez nieskończenie mały okres czasu, skumulowałeś tę prędkość razy dłuższy czas, niż byłeś w tej pozycji. Geometrycznie to tylko obliczanie obszaru. Poprzednio funkcja obliczania powierzchni była podana w postaci skończonej liczby elementów, ale można ją również zdefiniować za pomocą limitu. Z tą notacją można zdefiniować całkę w następujący sposób:

$$\int f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(x)$$

Pasek krzywej przed f (x) jest symbolem używanym do przedstawienia całki funkcji f (x). Poprzednio widzieliście granicę jako prostą funkcję; teraz widzisz to jako nieskończoną funkcję. Nie musisz jednak iść tą ścieżką. Zamiast tego, jeśli po prostu myślisz o całce jako odwrotności pochodnej, możesz rozwiązać wiele problemów. Jest jeszcze jedna rzecz, na którą trzeba uważać: Poprzednio, kiedy obliczano pochodną funkcji, nie zatrzymywano informacji o żadnym punkcie na linii stycznej. Zachowałeś tylko jego zbocze. Staje się to problemem, gdy się odwrócisz, ponieważ oznacza to, że kiedy integrujesz funkcję, potrzebujesz więcej informacji w celu przywrócenia równania. Poniższy przykład ilustruje ten punkt:

$$f(x) = x^3 + 1$$
$$f'(x) = 3x^2$$
$$\int f'(x) = x^3$$

Zauważ, że straciliśmy informacje na +1. Jedyny sposób na przywrócenie informacji to, co zostało utracone, to mieć warunek początkowy, który może pomóc w podłączeniu wartości do równania i rozwiązaniu go. Na przykład, jeśli wiesz, że f (0) = 1, możesz łatwo zrekonstruować równanie. Ponieważ całki są zdefiniowane jako ograniczenia, właściwości limitów funkcji ciągłej oznaczają całki. W ten sposób proces dodawania całek, podobnie jak w przypadku pochodnych, można łatwo podzielić na części i pomnożyć przez stałe. Jak już wspomniano wcześniej, jeśli chcesz użyć całki do obliczenia obszaru pod dwiema krzywymi, nie potrzebujesz stałej, ponieważ ona się skasuje. Zauważ:

$$\int_a^b f'(x) = f(b) - f(a)$$
$$= (b^3 + c) - (a^3 + c)$$
$$= b^3 - a^3$$

Ta notacja, która zasadniczo stwierdza, że całka jest obliczana z przedziałem [a, b], to jest to, czego będziesz używał przez większość czasu w odniesieniu do całek. Jeśli ułatwi ci to życie, możesz podzielić swoją integrację na wiele mniejszych elementów. Jeśli, na przykład, funkcja została zdefiniowana w sposób częściowy, można obliczyć całkę na pierwszym kawałku i całkę na drugim elemencie, każdy z własnym zestawem zakresów, i byłby to odpowiednik obliczenia wszystkiego w jednej całce dla całego zakresu (z wyjątkiem sytuacji, gdy krzywa została zdefiniowana w sposób częściowy, w takim przypadku należy podzielić krzywą w górę).

Metoda Intuicyjna

"Metoda intuicyjna" to dość wymyślna nazwa słowa "zgadnij". Za pomocą tej techniki można intuicyjnie znaleźć równanie z wiedzą o pochodnej zestawu funkcji. Oto przykład:

$$\int x^3 \sqrt{x^4 + 3}\,dx$$

Pierwszą rzeczą, która powinna przyjść do głowy jest to, że potęga x wewnątrz pierwiastka kwadratowego jest tylko o jeden stopień mniejsza niż potęga wewnątrz pierwiastka kwadratowego. Jest to dobra wskazówka, że prawdopodobnie pochodzi z reguły produktu. Aby odtworzyć wstępne równanie z myślą o tym, musisz po prostu znaleźć równanie, które po wyprowadzeniu będzie równe temu, co masz na górze. Kontynuujmy:

$$\frac{d\left(\sqrt{x^4+3}\right)}{dx}=\frac{d\left(x^4+3\right)^{1/2}}{dx}$$
$$=\frac{4x^3\left(x^4+3\right)^{-1/2}}{2}$$
$$=2x^3\left(x^4+3\right)^{-1/2}$$

Nie do końca, ale zaczyna wyglądać trochę jak poprzednie równanie. Potęga jest oczywiście błędna, więc pierwszym krokiem byłoby to naprawić. Jeśli myślisz odwrotnie, potrzebujesz potęgi 3/2, abyś mógł uzyskać potęgę 1/2, kiedy wyprowadzasz. Podłączmy i grajmy ponownie:

$$\frac{d\left(x^4+3\right)^{3/2}}{dx}=\frac{3}{2}4x^3\left(x^4+3\right)^{1/2}$$
$$=6x^3\sqrt{x^4+3}$$

Już pachnie zwycięstwem. Brakuje równania początkowego o współczynniku sześć. Wszystko, co musisz zrobić, to dodać odwrotność wielokrotności sześciu przed równaniem, aby je anulować:

$$\frac{d\frac{1}{6}\left(x^4+3\right)^{3/2}}{dx}=\frac{1}{6}\frac{3}{2}4x^3\left(x^4+3\right)^{1/2}$$
$$=x^3\sqrt{x^4+3}$$

$$\int x^3\sqrt{x^4+3}dx=\frac{1}{6}\sqrt[3]{x^4+3}+C$$

Rozumiem! Ta metoda jest przyjemna, ale niestety nie jest zbyt bezpośrednia; w rezultacie może szybko wymknąć się spod kontroli. Na szczęście istnieją inne metody rozwiązywania trudniejszych całek.

Całkowanie przez podstawienie

Ta metoda jest podobna do tej, którą wykonano w poprzedniej sekcji, ale jest nieco bardziej formalna. Chodzi o to, aby zastąpić wyrażenie innym wyrażeniem. Jeśli dokładnie śledzisz wszystko, możesz użyć metody zgadywania na integralnej i uzyskać łatwiejsze równanie do zabawy. Kiedy już uzyskasz ostateczne rozwiązanie, możesz po prostu ponownie zastąpić równania i gotowe. Jedyną trudną częścią tego jest to, że musisz śledzić dx. Przyjrzyjmy się przykładowi:

$$\int\tan\left(x\right)dx=\int\frac{\sin\left(x\right)}{\cos\left(x\right)}dx$$

Tu zaczyna się trudna część. Metoda podstawienia jest w zasadzie metodą odgadywania i sprawdzania opartą na procesie. Wciąż wymaga pewnego poziomu intuicyjności, aby rozwiązać równanie. Szczególnie interesująca jest tutaj funkcja ln. Aby to wykonać, zamień jak pokazano:

$$w = \cos(x)$$
$$dw = \frac{d(\cos(x))}{dx}$$
$$= -\sin(x)$$

$$\int \tan = \int -\frac{dw}{w}$$
$$= -\ln|w| + C$$
$$= -\ln|\cos(x)| + C$$

Oczywiście zakłada to, że wiesz, że pochodna ln wynosi 1 ponad x, kiedy ty wiesz, że gra z algebraicznością staje się jak bułka z masłem. Jak widzisz, jest to w zasadzie ta sama metoda, co metoda odgadywania i sprawdzania, z wyjątkiem tego, że definiujesz funkcję, testujesz ją względem całki, a kiedy osiągasz punkt, w którym masz coś, co jest ci znane, integrujesz je.

Całkowanie przez części

Może być dość trudno odszyfrować formułę, gdy produkt jest zaangażowany w początkowej pochodnej; Byłoby miło mieć formułę, która może ci pomóc w takich rzeczach. Jest to idea stojąca za metodą integracja po części. Przestrzegaj następującej logiki:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u'v + uv'$$
$$uv' = \frac{d(uv)}{dx} - u'v$$
$$\int uv' = \int \frac{d(uv)}{dx} - \int u'v$$
$$= uv - \int u'v$$

Wygląda to jak zwykły żonglerka algebraiczna, ale to ostatnie wyrażenie może ci pomóc rozwiązać niektóre problemy. Na początek pozwala spojrzeć na problem, patrząc na mniejszy problem (znany również jako technika "dziel i rządź"); oznacza to, że dzieli on tę funkcję na dwa odrębne komponenty i patrzy na każdą z nich. Jeden ze składników jest uważany za inną funkcję, podczas gdy drugi jest uważany za pochodną funkcji. W związku z tym, bez względu na to, którą funkcję określisz jako "v", powinno być dość łatwe do zintegrowania, ponieważ będziesz potrzebować tego w rozszerzeniu. Co więcej, jeśli u 'jest prostsze niż u, pomoże ci to przy obliczaniu całki. To samo można powiedzieć o v w stronę v '. Aby to zilustrować, zmierzymy się z problemem, który nie jest oczywisty na początku:

$$\int \cos^2(x)\,dx$$

Wybierz $u = v' = \cos(x)$

$$u' = \frac{d(\cos(x))}{dx} = -\sin(x)$$

$$v = \int \cos(x)\,dx = \sin(x)$$

$$\int uv'dx = uv - \int u'v$$

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x)\,dx &= \cos(x)\sin(x) + \int \sin^2(x)\,dx \\ &= \cos(x)\sin(x) + \int 1 - \cos^2(x)\,dx \\ &= \cos(x)\sin(x) + \int 1dx - \int \cos^2(x)\,dx \\ &= \frac{\cos(x)\sin(x) + x + C}{2}\end{aligned}$$

W tym przypadku można było użyć tożsamości, aby przekształcić całkę w tę samą rzecz, której szukałeś. Kiedy już to zrobisz, po prostu połącz te terminy po jednej stronie równania. Ogólnie rzecz biorąc, sztuczka do tego nie jest tak skomplikowana; v musi być łatwa do zintegrowania i musi być łatwa do rozróżnienia (zazwyczaj nie stanowi to problemu). Wreszcie pomaga, jeśli u'v jest łatwa do zintegrowania. Kluczem jest to, że jeśli możesz zmniejszyć złożoność całki u'v, możesz zastosować tę koncepcję rekurencyjnie, dopóki nie osiągniesz czegoś, co jest na tyle podstawowe, że można je zintegrować. Ćwiczenie jest tutaj najważniejsze. Niestety, jest to typ rzeczy, których klon może nie być w stanie odebrać, więc znajomość tych rzeczy może bardzo pomóc.

Podwójne i potrójne całki

W 2D całkę można uznać za podpisany obszar pod krzywą. W 3D obowiązuje ta sama zasada. Kiedy integrowałeś się w regionie [a, b], teraz integrujesz się z prostokątnym regionem [a, b]x[c , d]. Ale w jaki sposób matematyka obejmuje wyższe wymiary? Pomysł jest niezwykle prosty. Brzmi dokładnie tak, jak idea, że matryca jest wektorem wektora. Jeśli chcesz przybliżyć obszar funkcji 3D, możesz podzielić głębokość m interwałów. Następnie można obliczyć powierzchnię krzywej w 2D i pomnożyć ją przez długość przedziału głębokości. Suma na tych małych obszarach, a teraz masz podejście numeryczne. Zastosuj poprzednią numeryczną metodę całkowania, ale zamiast obliczać wysokość funkcji i pomnóż ją przez wielkość przedziału, obliczyć obszar krzywej (który powinieneś wiedzieć, jak obliczać do tej pory) i pomnożyć przez wielkość przedziału. Jest to jedynie rozszerzenie. Oto ilustruje to:

$$\begin{aligned}\text{Wolumin} &= \sum_{i=0}^{m} \text{Area}(f(x))\Delta z \\ &= \sum_{i=0}^{m} \left(\int f(x)dx\right)\Delta z\end{aligned}$$

Skoro m dąży do nieskończoności, co otrzymujesz? Werble. . . Kolejna całka! Więc końcowe równanie wygląda na coś podobnego do tego:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx$$

Ten rodzaj całki nazywany jest często całką podwójną, która jest po prostu integralną częścią całki. (Oczywiście można rozszerzyć tę koncepcję do 4D i później, używając potrójnych całek i hiper-całek.) W powyższym zapisie pierwsza (wewnętrzna) całka jest wykonywana względem y, a następnie następuje po x. W przypadku obszaru kwadratowego można zamieniać zamówienie bez obaw, pod warunkiem, że są to funkcje ciągłe. W rezultacie, niezależnie od tego, czy zaczynasz od integracji w x lub y tak naprawdę zależy tylko od tego, która z dwóch całek jest łatwiejsza do obliczenia. Weźmy prosty przykład:

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{w obszarze} \quad [-1,1]\times[1,1]$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 + y^2 dxdy &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} x^2 + y^2 dx\right)dy \\
&= \int_{-1}^{1}\left(\left.\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_{-1}^{1}\right)dy \\
&= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1^3}{3} + 1y^2 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 1y^2\right)\right)dy \\
&= \int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{3} + 2y^2\right)dy \\
&= \left.\frac{2y}{3} + \frac{2y^3}{3}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{2\cdot 1}{3} + \frac{2\cdot 1^3}{3} - \left(\frac{2(-1)}{3} + \frac{2(-1)^3}{3}\right) \\
&= \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Podwójne całki w nieprostokątnych regionach

Niektóre problemy mogą pojawić się podczas próby obliczenia całki na obszarach, które nie mają charakteru prostokątnego. Na przykład, jeśli chcesz obliczyć powierzchnię cylindra, prawdopodobnie będziesz miał trudności z wykorzystaniem technik, których nauczyłeś się do tej pory. Jeśli już znasz obszar plastra na kształcie po prostej, możesz obliczyć całkę regionu, po prostu sumując te plastry, używając całki - czyli używając podwójnej całki. Na przykład wiesz, że obszar koła to $2\pi r^2$. Aby obliczyć powierzchnię cylindra, wystarczy zsumować te przekroje (to jest wiele okręgów, które tworzą cylinder) na wysokości:

$$\int_0^{Height} 2\pi r^2 dx = 2\pi r^2 x \Big]_0^{Height}$$
$$= 2\pi r^2 Height - 2\pi r^2 0$$
$$= 2\pi r^2 Height$$

Pomnóż obszar koła przez jego wysokość i już go masz. W fizyce może być całkiem użyteczne powiązanie objętości obiektu z jego masą wolumetryczną, więc znajomość objętości tworzonych obiektów może być przydatna, nie wspominając już o znajomości zaawansowanej matematyki, którą można zastosować do podobnych pojęć. Jeśli, na przykład, nie znasz równania dla obszaru koła, musisz wykonać jakąś prawdziwą pracę, aby ustalić, co to jest. W takim przypadku sztuczka polegałaby na parametryzacji równania granicy. Kiedy już to zrobisz, możesz podłączyć te wartości / równania do granic integracji. Zobaczmy, jak to się dzieje w kręgu, gdzie możesz pozwolić x być liniowym i obliczyć y jako funkcję x:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

W związku z tym możesz całkować w zakresie

$$[-r, r] \times \left[-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}\right]$$

Zmienia to granicę y, biorąc pod uwagę wartość x. Oczywiście, pierwszy zakres musi być liniowy, aby uzyskać wartość liczbową. Pozostałe zakresy mogą zależeć od każdej poprzedniej wartości granicznej. Teraz zakończmy problem obliczania obszaru koła.

$$\text{Obszar} = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} 1 dx dy$$
$$= \int_{-r}^{r} y \Big]_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dy$$
$$= \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - y^2} dy$$

$$y = r \cdot \sin(\theta)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{r^2 - r^2 \sin(\theta)} r d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2r^2 \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2r^2 \sqrt{\cos^2(\theta)} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2r^2 \cos(\theta)\, d\theta$$

$$= 2r^2 \sin\theta \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\pi r^2$$

Pierwszą rzeczą, którą powinieneś zauważyć, jest nowy sposób obliczania obszaru koła. Tak, możesz obliczyć powierzchnię okręgu za pomocą pojedynczej całki, ale możesz też spojrzeć na nią jako na podwójną całkę, gdzie wszystkie elementy są małymi "pikselami", jeśli chcesz. Zaletą tej metody z drugiej strony jest to, że może ona również łatwo obliczyć funkcję w 3D. Na przykład, aby obliczyć obszar kuli, wystarczy zamienić 1 na wartość z. Podsumowując, ta metodologia jest bardziej religijna niż cokolwiek innego, więc wybierz tę, którą preferujesz i kontynuuj ją. Idea tego rozdziału powinna być teraz jasna. Podczas obliczania obszaru jedna zmienna obejmuje zakresy liniowe, podczas gdy druga zmienna zależy od poprzedniej. Podczas obliczania całki oblicza się ją zgodnie z oczekiwaniami, zastępując funkcję y w zintegrowanym. zmienna. Częścią, która może cię zaskoczyć, jest zastosowana substytucja. Widziałeś wcześniej metodę podstawiania, ale tutaj wartość nie została ponownie podstawiona. Zamiast tego pasożytniczy r pojawił się znikąd, a ty zachowałeś wszystko, jak jest. W rzeczywistości ta etykieta jest metodą mapowania, a nie substytucyjną. Jest to po prostu kolejne narzędzie do dodania do zestawu narzędzi.

Całkowanie poprzez Odwzorowanie

Jak wspomniano wcześniej, odwzorowanie różni się od podstawienia, ponieważ nic nie jest podstawione z powrotem do równania. Na przykład w ostatnim przykładzie mapowanie zostało wykonane z kartezjańskich współrzędnych na współrzędne biegunowe. Ponieważ nie planujesz zastąpić, ważne jest, aby spojrzeć na zmiany, które twoje równanie ucierpią podczas tej transformacji. Pierwszym krokiem do mapowania jest wypisanie parametrycznego równania mapowania. Mając na uwadze powyższy przykład, masz następujące:

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

W związku z tym, aby transformacja była ważna, należy zmienić całkowanie odpowiednio dostosować. Aby to zrobić, możesz odwrócić odwzorowanie i podłączyć wartości graniczne, aby zobaczyć, do czego mają zostać ustawione. W naszym konkretnym przypadku mieliśmy następujące:

$$y = r\sin(\theta)$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{y}{r}\right)$$

$$\theta_r = \arcsin\left(\frac{r}{r}\right)$$

$$= \arcsin(1)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_{-r} = \arcsin\left(\frac{-r}{r}\right)$$

$$= \arcsin(-1)$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

Jak na razie dobrze. Teraz jedyne, co pozostało do wyjaśnienia, to fakt, że pojawił się pasożytniczy r. Mapowanie jest w rzeczywistości funkcją funkcji. Innymi słowy, funkcja mapowania g (x) na funkcji f (x) to f (g (x)). Rozszerz formułę przez cały czas, przeskocz kilka kółek matematycznych, a otrzymasz następujące, gdzie x jest oryginalnym wektorem zmiennym, u jest wektorem mapującym, a R jest obszarem granicy dla integracji z R *, nowy region graniczny do integracji:

$$\int_{R^*} f(g(\mathbf{x}))\left|\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{u}}\right| du = \int_R f(x)\,dx$$

Jest to w zasadzie to, co widzieliście podczas dyskusji na temat pochodnej macierzy (zwanej także jakobianinem). Macierz transformacji jest macierzą jakobian, na którą patrzysz. Kontynuując przykład ustalony do tej pory, masz następujące:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{d\left(r\cos(\theta)\right)}{dr} & \dfrac{d\left(r\cos(\theta)\right)}{d\theta} \\ \dfrac{d\left(r\sin(\theta)\right)}{dr} & \dfrac{d\left(r\sin(\theta)\right)}{d\theta} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\left|\mathbf{B}\right| = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta)$$

$$= r\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)$$

$$= r$$

Teraz, kiedy wrócisz do przykładu podanego w poprzedniej sekcji, powinieneś być w stanie w pełni zrozumieć, co zostało zrobione. Jest to dość potężne narzędzie integracyjne i dotyczy sferycznych układów współrzędnych, mapowania cylindrycznego lub dowolnej innej mapy, którą możesz wymyślić.

Używanie całkowania do obliczania długości łuku

Jak możesz znaleźć obwód koła? Jeśli zastanawiasz się nad relacjami między promieniami i okręgiem, zastanów się nad znalezieniem obwodu elipsy. Obwód okręgu jest w rzeczywistości długością łuku, z którego składa się okrąg (w rzeczywistości okrąg to tak naprawdę tylko łuk). Na szczęście całki mogą być całkiem przydatne, gdy przychodzi czas na obliczenie długości łuku. Zawsze dobrze jest znać odległości, zwłaszcza gdy mamy do czynienia z sztuczną inteligencją, która musi znaleźć optymalne ścieżki. Pomysł opiera się na nieskończonej liczbie odległości. Jeśli wycinasz swoje krzywe w zestaw interwałów i kumulujesz odległość między dwoma punktami w tych odstępach, uzyskasz długość łuku. Oto idea stojąca za rysunkiem 18, a poniżej znajduje się matematyka za nim:

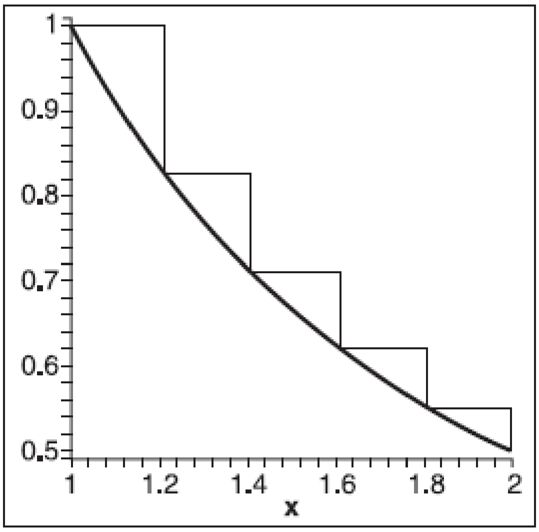
$$\text{Długość} = \sum \text{Odległość}$$

$$= \int \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}$$

$$\approx \int \sqrt{\Delta^2 x + \left(f'(x) \cdot \Delta x\right)^2}$$

$$= \int \Delta x \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

$$= \int \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$



Jeśli twoja funkcja jest zdefiniowana parametrycznie, o wiele łatwiej ją wyrazić, jak pokazuje to poniższe równanie:

$$\text{Długość} = \int \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\, dt$$

Sztuczka do rozwiązania tego problemu polega na zauważeniu, że gdy delty stają się naprawdę małe, łuk rzeczywiście wygląda jak linia prosta. Jest to podobne do przykładu Ziemi wspomnianego wcześniej w tym rozdziale. Podczas przybliżania możesz przybliżać delta y jako linię prostą, używając nachylenia delta x i x (czyli równania linii). Jak to jest przydatne? Załóżmy, że chcesz narysować parabolę z równaniem $y = x^2 - 4$. Chcesz narysować tę krzywą z zakresem [-10, 10], próbując zestaw współrzędnych na krzywej i łącząc te wierzchołki z liniami, ale ty chcesz określić, ile próbek należy pobrać na krzywej, aby wyglądała dobrze. Jeśli weźmiesz zbyt mało próbek, twoja krzywa będzie wyglądać paskudnie; wzięcie zbyt dużej liczby spowoduje niepotrzebne przeciążenie procesora. Jeśli znasz długość krzywej, możesz po prostu z grubsza obliczyć liczbę punktów, które chcesz uzyskać, i uzyskać liczbę próbek, które powinieneś wykonać. Na przykład, powiedzmy, że chcesz mieć średnią proporcję dwóch wierzchołków na jednostkę długości. Ile jest potrzebnych wierzchołków dla wspomnianej krzywej? Przejdźmy do matematyki:

$$\begin{aligned}
\text{Długość} &= \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + \frac{d^2\left(x^2 - 4\right)}{dx}}\, dx \\
&= \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx \\
&= \int_{-10}^{10} \left(1 + 4x^2\right)^{1/2} dx \\
&= \left. \frac{x\sqrt{1+4x^2}}{2} + \frac{\operatorname{arcsinh}(2x)}{4} \right]_{-10}^{10} \\
&= 202.0946
\end{aligned}$$

W tym tempie potrzebujesz 202/2 = 101 próbek, aby uzyskać wymaganą dokładność. Teraz możesz zobaczyć, jak skomplikowana może stać się taka prosta całość. Spróbuj sprawdzić, czy ścieżka od początku do końca została znaleziona