IX. Fizyka Zaawansowana

Zgodnie ze staropolskim podejściem do programowania gier, gry takie jak Super Mario Brothers używały zakodowanych tabel do symulowania takich aspektów fizyki jako grawitacja. Podobnie, w pierwszych dwóch wersjach gry Doom, znaki były renderowane za pomocą ikonek, które są wstępnie obliczonymi renderowanymi obrazami wykonanymi przy różnych kluczowych klatkach i kątach. Do czasu pojawienia się Quake'a, komputery były wystarczająco szybkie, aby mogły rozwiązywać wielokątne postacie, a stopień realizmu został wypchnięty daleko poza granice gier, ale jego animacje zostały wstępnie skomputeryzowane. Na przykład ramię postaci może poruszać się tylko z jednego zakresu do drugiego w sposób liniowy. W końcu, bardziej zaawansowane techniki zaczęły traktować postać jako model kostny - to znaczy, że jej kości mogły się poruszać, co mogło dyktować położenie skóry i chrząstki bohatera. Ten rozwój przyniósł modele, które pozwoliły bohaterom poruszać się swobodniej i realistycznie. Podobnie jak "modele", których gry używają do renderowania świata, fizyka również jest po prostu modelem prawdziwego świata. W rzeczywistości, tak jak modele używane w grze są dokładne tylko do pewnego momentu, tak samo jest z fizyką. Na przykład, aby uwzględnić wszystkie czynniki, które wpływają na sposób, w jaki spada obiekt, trzeba myśleć, między innymi, o sile wiatru, lepkości, grawitacji i jednym czynniku, który sieje spustoszenie z celnością fizyki: chaosem. Cząsteczki o niskim poziomie poruszają się chaotycznie, co sprawia, że niemal niemożliwe jest przewidzieć ich ruch. Modele fizyki, które są uważane za "dokładne", są na ogół modelami, których chaotyczne zachowania są statystycznie uśrednione. Aby to zilustrować, załóżmy, że chcesz symulować opór powietrza pod wpływem grawitacji. Aby to zrobić, można po prostu uśrednić opór powietrza i twierdzić, że opór daje współczynnik x, podczas gdy w rzeczywistości dokładniejszy model uwzględniałby każdą cząsteczkę powietrza w przestrzeni i sposób, w jaki każdy wchodzi w interakcję z spadającym obiektem. Nawet to nie byłoby idealnym modelem, ponieważ można rozbić cząsteczkę powietrza na różne atomy, atomy na cząstki kwarku, cząstki kwarku na energię i tak dalej. Oczywiście, taki model na poziomie mikro jest bezużyteczny w programowaniu gier, ponieważ niewielka różnica w dokładności nie ma znaczenia w świecie makr. Część 8 , dostarczyła ci informacji potrzebnych do liniowego przemieszczania obiektów. W realnym świecie jednak nie wszystko porusza się w linii prostej. W rzeczywistości wiele teorii w fizyce twierdzi, że wszystko - nawet obiekty poruszające się po linii prostej - oscyluje. Teorie kontrowersyjne posuwają się nawet do stwierdzenia, że obiekt nigdy nie znajduje się w jednej określonej pozycji w czasie; zamiast tego można powiedzieć, że obiekt znajduje się w pobliżu obszaru, chociaż możemy go postrzegać jako nieruchomy. Jedną z rzeczy, o której musisz pamiętać, jest to, że niezależnie od tego, jaką grę planujesz stworzyć, zawsze dostępny jest dokładniejszy model fizyczny. Każdy, kto twierdzi, że wąskie gardło gry jest ogólnie GPU (Graphical Processing Unit), poważnie nie wykorzystuje procesora. W idealnej sytuacji procesor i GPU powinny być zmaksymalizowane. Jeśli tak nie jest, powinieneś być w stanie wykorzystać CPU, aby pomóc GPU, lub zwiększyć realizm gry. Oczywiście, nie zwariuj na jednej części symulacji. Na przykład, jeśli zasymulowałeś grawitację za pomocą złożonych równań pola siłowego, nie uzyskałbyś o wiele lepszego modelu, niż gdybyś użył równań opisanych w poprzednim rozdziale. Ale zamiast tego można użyć procesora, aby dodać do sceny jakieś fajniejsze efekty (to znaczy więcej realizmu). W szerokim zakresie ruchów oscylacyjnych następujące tematy są interesujące dla tego tekstu:

- Ruch kątowy
- Ruch wahadłowy
- Ruch sprężynowy
- Centrum masy

Ruch kątowy

Załóżmy, że pracujesz nad strzelanką 3D, w której gracze mogą rzucić się na siebie młotkiem. Jedyny problem polega na tym, że młot, który zaimplementowałeś używając wiedzy zdobytej w części 8 - czyli dokonując liniowego ruchu we współrzędnych kartezjańskich - po prostu tłumaczy z A na B. Zamiast tego chciałbyś go obrócić, idąc do przodu Jeśli zamienione na użycie współrzędnych kartezjańskich na współrzędne biegunowe lub sferyczne, można łatwo ustalić równania ruchu obrotowego liniowo. Dokładnie to zrobisz w tej części.

Uwaga

Omówię tutaj tylko współrzędne biegunowe, ale powinieneś z łatwością zobaczyć, jak to ma zastosowanie do współrzędnych sferycznych w 3D.

Ruch obrotowy

Aby zaprogramować młotek tak, aby nie tylko poruszał się z punktu A do punktu B, ale również podczas obracania, wymaga trochę więcej myślenia. Najpierw pomyśl o kolejności, z której będziesz korzystać, aby to zrobić . Na początek powinieneś pracować w modelu obiektowym, w którym środek ciężkości obiektu pasuje do punktu początkowego. Umożliwi to wykonanie obrotów w pierwszej kolejności. Następnie możesz przetłumaczyć wszystko w kosmosie, gdzie młot przesunie się z punktu A do B. To wszystko jest miłe, ale jaka jest matematyka za tym? Korzystając z tego, czego nauczyłeś się w poprzedniej części, powinieneś być w stanie samodzielnie wymyślić równania. Zaczynasz od ustawienia stałych. Załóżmy na przykład, że prędkość obiektu jest stała - to znaczy, że obiekt został rzucony w sposób rotacyjny, i cały czas się obraca. Możesz wypisać równania, pozwalając na w kąt prędkości (czyli pochodną kąt w czasie), pozwalając w_0 być początkową prędkością kątową i pozwalając, aby ϕ_0 było początkowym kątem:

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{d\theta}{dt} = w_0 \\
\theta &= \int w dt \\
&= \int w_0 dt \\
&= w_0 t + \theta_0
\end{aligned}
$$

Niespodzianka! Równania dla obrotu są takie same, jak równania dla ruchu liniowego. Jedyna różnica polega na tym, że tutaj prędkość jest okrągła, a nie liniowa. To czyni wielką różnicę, co oznacza, że nie można łatwo przekonwertować z jednego na drugi.

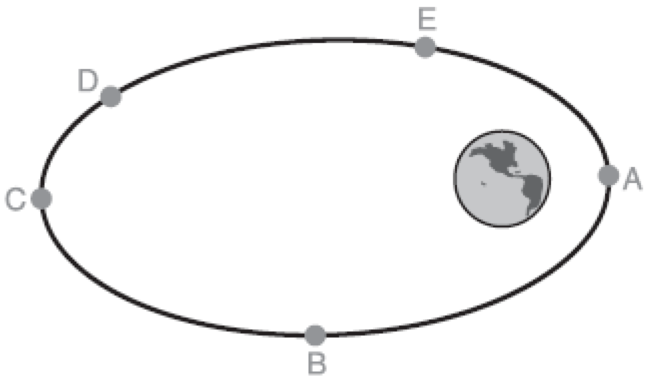
Uwaga

Tak jak równania dla rotacji są identyczne jak równania dla ruchu liniowego przy stałej prędkości, tak samo są one identyczne, biorąc pod uwagę stałe przyspieszenie.

Tutaj, prędkość i pozycja kąta, omega, jest położeniem kątowym i prędkością kątową. Na przykład, jeśli określisz, że młot zaczyna się pod początkowym kątem 0 i że obraca się z prędkością 0,01 rad / sek, może obliczyć równanie dla jego obrotu kątowego w funkcji czasu:

$$\theta = 0.01t$$

Rotacja jest raczej wyjątkowa, głównie dlatego, że zdarzenie powtarza się w czasie, jak pokazano na rysunku



Oznacza to, że gdy obiekt obraca się wokół środka, po określonym czasie powraca do tego samego położenia. Z tego powodu przydatne może być spojrzenie na ruch obrotowy pod względem okresu i częstotliwości. Okres p rotacji jest czasem trwania jednego pełnego cyklu, lub jeśli wolisz, jest to czas, jaki zajmuje cząsteczka, aby wykonać pełny cykl wokół środka. Z drugiej strony częstotliwość f jest odwrotnością tego. Informuje, ile cykli można wykonać w jednostce czasu. Jak więc oba te pojęcia odnoszą się do prędkości kątowej? Opisują to następujące równania:

$$f = \frac{2\pi}{p}$$

$$w = 2\pi f$$

Zatem widać, że f jest odwrotnością p:

f= 1/p

Prędkość : Liniowa czy Kątowa?

Kiedy zajmujesz się obrotami, może być całkiem przydatne przekształcenie z prędkości liniowej na prędkość kątową. Prędkość liniowa jest tym, co widzieliście w poprzednim rozdziale, podczas gdy prędkość kątowa zajmuje się prędkością z powodu ruchu obrotowego. Weźmy na przykład samochód jadący w dół zbocza. Jeśli twój samochód nie jest zabytkowym jalopotem, nie będzie ciągnięty po zboczu; zamiast tego jego koła powinny się swobodnie poruszać w dół. Toczenie jest zupełnie inne niż przeciąganie, ponieważ przy toczeniu tracisz bardzo mało; tarcie jest mniejszym czynnikiem. Gdybyś miał modelować opony obracające się w tym samochodzie, miałbyś już prędkość samochodu, ale nie prędkość, z jaką obracają się koła. Będziesz potrzebował tej informacji, aby zapewnić prawidłowy obrót kół. Aby rozwiązać ten problem, spójrz na niego z uwzględnieniem okresu i częstotliwości (pamiętaj, że częstotliwość określa liczbę obrotów w jednostce czasu). Aby określić częstotliwość, z jaką obracają się opony samochodu, zacznij od użycia równania 2? R, aby obliczyć obwód koła. Dlaczego? Ponieważ koła samochodu są w rzeczywistości kołami. Jeśli przetniesz jedną z opon i spłaszczysz ją do linii, długość linii będzie wynosić 2? R. Innymi słowy, przy pełnym obrocie opony samochód przejechałby dystans 2 r. Aby wyrazić to wszystko jako funkcję częstotliwości, musisz określić, ile obrotów nastąpi w danym przedziale czasu. Jeśli wiesz, że samochód pokonał dystans x w czasie dt, a opony mają promień r, możesz następnie podzielić całkowitą odległość x (czyli długość opony) przez czas aby uzyskać częstotliwość:

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{x}{2\pi r dt} \\
&= \frac{v}{2\pi r}
\end{aligned}
$$

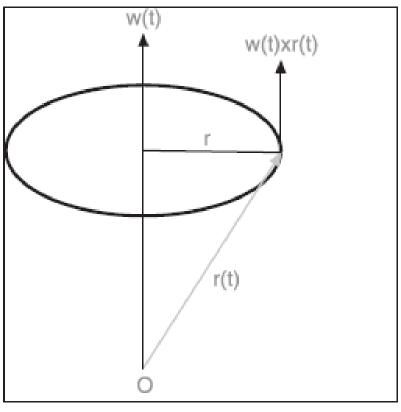
Przy obserwacji, że pochodna x w czasie jest rzeczywiście prędkością cząstki, odkryto stosunkowo prosty związek między częstotliwością a prędkością cząstki, zważywszy na promienie. Jeśli podłączysz to równanie do prędkości kątowej, możesz w końcu przekształcić z prędkości kątowych na prędkości liniowe:

$$
\begin{aligned}
w &= 2\pi f \\
&= \frac{2\pi v}{2\pi r} \\
w &= \frac{v}{r}
\end{aligned}
$$

Zakładając, że prędkość samochodu wynosi 60 mil na godzinę, a opony samochodu mają promień 0,0002367 mil (potężny monster truck z 15-calowymi kołami), uzyskujesz prędkość kątową

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{60\text{m/hr}}{0.0002367\text{m}} \\
&= 253485.4245/\text{hr} \\
&= 4224.7570/\text{min} \\
&= 70.4126/\text{sec}
\end{aligned}
$$

To 70 rad na sekundę, czyli mniej więcej 11 obrotów na sekundę - naprawdę dość szybko. Co więcej, przywołuje interesujący punkt: jak określić kierunek prędkość, gdy obrót jest kątowy? Aby odpowiedzieć na to pytanie, wystarczy wziąć pod uwagę definicję prędkości. W rachunku różniczkowym prędkość jest interpretowana jako styczne nachylenie krzywej w tym punkcie i ta definicja ma tu zastosowanie. W 2D łatwo jest uzyskać kierunek, który jest ortogonalny do punktu. W 3D można użyć poprzecznego produktu do znalezienia prędkości, jak pokazano na rysunku:



v(t) = w(t) x r(t)

W tym równaniu v jest prędkością, w jest prędkością kątową, a r jest wektorem współrzędnych (tj. Wektorem, który rozpoczyna się od początku i przechodzi do punktu r na kole). Piękno pisania tego równania w tej formie polega na tym, że pozwala on swobodnie poruszać osią obrotu. Tak więc, jeśli zobaczysz kogoś wymachującego flarą, możesz łatwo określić położenie obiektu poprzez integrację wspomnianego równania.

Przyśpieszenie

Jak trudno jest obliczyć przyspieszenie obrotu? Jak się okazuje, nie tak trudno. Ty już masz równanie opisujące prędkość przedmiotu jako funkcję; wszystko, co musisz zrobić, to odróżnić tę funkcję. Równanie jest zdefiniowane jako iloczyn dwóch funkcji, które powinny wywoływać dzwonek: Jest taki sam jak w regule produktu w rachunku różniczkowym. Z początku może nie być oczywiste, że produkt krzyżowy również spełnia tę zasadę, ale jeśli chcesz, możesz rozszerzyć równanie na długą drogę, aby zobaczyć, że tak naprawdę jest. Wniosek ten jest następujący:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(t) &= \mathbf{v}'(t) \\
&= \frac{d\left(\mathbf{w}(t)\times\mathbf{r}(t)\right)}{dt} \\
&= \mathbf{w}'(t)\times\mathbf{r}(t)+\mathbf{w}(t)\times\mathbf{r}'(t) \\
&= \mathbf{w}'(t)\times\mathbf{r}(t)+\mathbf{w}(t)\times\left(\mathbf{w}(t)\times\mathbf{r}(t)\right)
\end{aligned}$$

Na koniec, jeśli prędkość kątowa w (t) jest stała, jej pochodna wynosi 0. Otrzymujesz następujące uproszczone równanie:

$$\mathbf{a}(t)=\mathbf{w}(t)\times\left(\mathbf{w}(t)\times\mathbf{r}(t)\right)$$

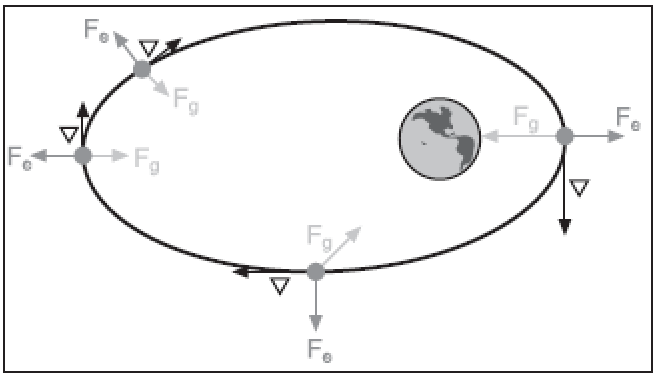
Prostsza forma - i, jeśli znasz fizykę, bardziej znana forma - to przypadek gdzie oś obrotu jest prostopadła do osi ruchu (tak jest na przykład w 2D) i jest opisana przez następujący skalar:

$a = v^2/r$

Co to dla ciebie oznacza? Mówiąc graficznie, wyżej uporządkowana funkcja jest zawsze definiowana jako styczna (ortogonalna) innej funkcji. Wracając do przykładu osoby machającej flarą, wiesz, że prędkość jest prostopadła do koła obrotu, lub elipsy, a nawet kuli, w zależności od wyboru kształtu wykonanego dla r (t). Przyspieszenie musi być prostopadłe do prędkości, więc jedynym sposobem osiągnięcia tego jest uzyskanie punktu przyspieszenia w kierunku osi obrotu. Ponieważ przyspieszenie jest związane z masą (flarą) na końcu drążka, koniecznie muszą być zaangażowane pewne siły. Jeśli sam weźmiesz taką broń i ją obrócisz, szybko dojdziesz do wniosku, że jeśli szybko ją obrócisz, wyciągniesz rękę, a jeśli kiedykolwiek ją puścisz, obiekt poleci do prędkość, z jaką ją wypuściłeś. Tak więc równanie dla siły odśrodkowej zastosowanej do obiektu jest zdefiniowane przez:

$$F_c = -m\left(\mathbf{w}(t)\times\mathbf{r}(t)\right)$$

Jeśli weźmiemy Ziemię jako inny przykład, istnieje dobry powód, dla którego grawitacja nie jest w sposób ciągły przyciągana ku słońcu. Przyjrzyj się bliżej sile odśrodkowej, a zauważysz, że znak jej siły sugeruje siłę skierowaną na oś obrotu, jak pokazano na rysunku



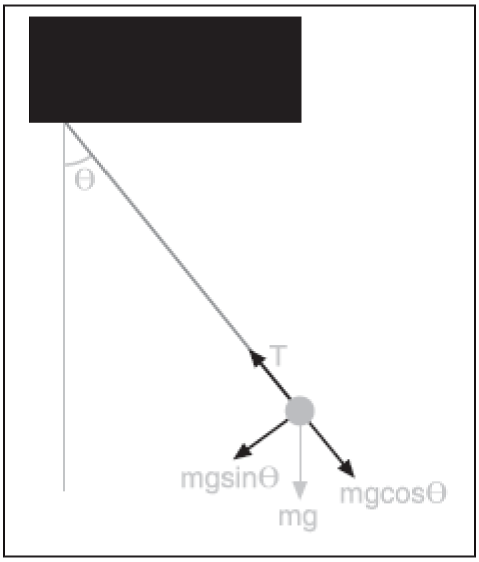
Tak więc, jeśli weźmiesz jakiś obiekt, trochę go przekręć i zwolnij, prawdopodobnie odleci od ciebie. Siłą potrzebną do trzymania przedmiotu w dłoni podczas obrotu jest siła dośrodkowa, która jest równa sile odśrodkowej, ale w przeciwnym kierunku.

Oscylacje

Więc budujesz następną grę Street Fighter i masz świetne plany na niegodziwca Bronie. Są to błyskawice, ostrza katany, shirukeny, maczugi i cepy. Niestety, masz problemy z oddaniem cepa. Kiedy postać trzyma cepa poziomo, łańcuch cepa też jest poziomy. Idealnie, metalowa kolczasta kula powinna zwisać z powodu grawitacji, ale oczywiście nie chcesz, aby kula uderzyła w podłogę (pamiętaj, że istnieje łańcuch, który utrzymuje kulkę w miejscu). Jak się okazuje, ten przypadek jest podobny do wahadła.

Ruch wahadłowy

Załóżmy, że chcesz renderować wahadło składające się z łańcucha nieważkości / bez tarcia i dołączone do punktu statycznego. Jeśli narysujesz diagram siły wahadła w taki sposób, że sznur jest wyrównany z osiami, jak pokazano na Rysunku 9.4,



otrzymujesz zestaw równań - w szczególności taki, który może umożliwić obliczenie liniowego przyspieszenia masy (który naprawdę służy jako siła przypominająca, tak, że sznurek kończy się wyrównany w pionie w stosunku do podłoża):

$$T = mg\cos(\theta)$$

$$ma = -mg\sin(\theta)$$

$$0 = a + g\sin(\theta)$$

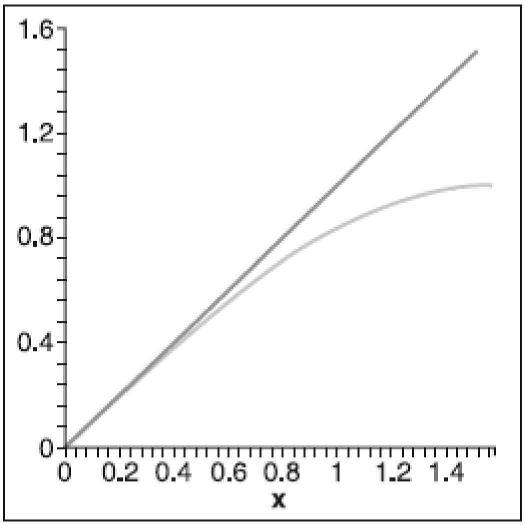
$$0 = \frac{d^2 s}{dt} + g\sin(\theta)$$

Pierwsze równanie określa fakt, że składnik siły wzdłuż sznurka się anuluje. Ma to sens, bo inaczej struna jest słabsza lub silniejsza niż grawitacja, co oznaczałoby, że masa spadnie lub ruszy w kierunku sufitu - żadna z nich nie ma sensu, jeśli sznur jest wystarczająco mocny, aby utrzymać masę. Drugie równanie jest interesujące. Pozwala uzyskać przyspieszenie w drugim kierunku. W tych równaniach s jest definiowane jako odległość łuku, przez którą masa będzie przemieszczać się od jej bieżącego punktu w dół, aż zostanie wyrównana w pionie. Te dwa równania dają liniową funkcję, która jest świetna, z tym że ten rodzaj ruchu jest oparty na częstotliwości. Z tego powodu dobrze byłoby mieć funkcję ruchu obrotowego. Możesz dalej zredukować równanie, jeśli zauważysz prosty fakt, że s można wyrazić przez długość przez kąt, uzyskując:

$$s = L\theta$$

$$0 = L\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\sin(\theta)$$

Jedynym problemem jest to, że osiągnąłeś punkt, w którym przyspieszenie jest określone przez grawitację i sinus kąta. Jest to brzydkie równanie, głównie dlatego, że definiujesz równanie z wartościami, które są zależne od niższych wartości różniczkowych. Zobaczyłeś to w rozdziale 8 w sekcji o polach siłowych; Przyspieszenie (z siły) zostało zdefiniowane jako funkcja odległości przedmiotu od środka. Te typy równań nazywa się zwykłymi równaniami różniczkowymi (ODE), a ich celem jest znalezienie oryginalnego równania, które czyni to równanie prawdziwym. W skrócie, chcesz rozwiązać poprzednie równanie, aby znaleźć funkcję kątową? (T) (? W czasie t, który jest reprezentowany przez? Sam powyżej), który weryfikuje równanie. Tego typu problemy mogą być postrzegane jako bardziej złożone problemy ze znalezieniem root. Chociaż ta książka nie obejmuje tego typu równań, to jednak nie oznacza, że w tym przypadku nie można znaleźć rozwiązania tego konkretnego problemu. Nawet przy całej wiedzy matematycznej na świecie nie ma znanego analitycznego rozwiązania tego równania. Zamiast tego, co fizycy zrobili, jest przybliżeniem. Funkcja sinus jest tutaj naprawdę problemem i dlatego jest zastąpiona przez. Jeśli narysujesz wykresy tych dwóch funkcji, zauważysz, że są one dość blisko siebie pod małymi kątami, jak pokazano na Rysunku 9.5.



Teraz, gdy masz prosty ODE, możesz znaleźć rozwiązanie (t) dla problemu, które daje:

$\theta(t) = A \sin(ft + \phi)$

z

$f = \sqrt{g/L}$

W tym miejscu możesz się zastanawiać, co oznacza A i jak to obliczyć. Na szczęście nie jest to zbyt trudne. A to amplituda lub, jeśli wolisz, największa wartość bezwzględna? kiedykolwiek utrzyma. ?, z drugiej strony, informuje o odchyleniu kąta. Jest to również określone przez warunki początkowe, co zostanie wkrótce pokazane. Tak więc, jeżeli masa postaci była początkowo w pozycji poziomej, amplituda kąta wynosiłaby 90 stopni, lub π / 2 rad. Przyjrzyjmy się przykładowi. Rozważcie cep o masie 10 wirtualnych mas przy przyspieszeniu grawitacyjnym 9,81 jednostek i o długości 2 wirtualnych jednostek długości z patyka. W ostatnim punkcie, w którym postać przyłożyła siłę do przedmiotu, cep został obrócony tak, że znalazł się pod kątem π / 4. W tej sytuacji pozycja masy w chwili t wynosi π / 4. Tak więc jest to wartość amplitudy, ponieważ grawitacja będzie tylko pociągała masę w dół, tworząc tylko mniejsze kąty. Dla ϕ, m usisz znaleźć wartość przy znajomości początkowych wartości. Początkowo wiesz, że w czasie t = 0 kąt jest maksymalny. To powiedziawszy, jeśli podłączysz wartości t = 0 i ϕ(t) = A w poprzednim równaniu, w końcu dojdziesz do następującego wniosku:

$$A = A\sin(0+\phi)$$
$$\sin^{-1}(1) = \phi$$
$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

Innym sposobem na ułożenie tego równania jest po prostu wykorzystanie tożsamości pomiędzy sinusem i cosinusem, a także zmiana sinusa na cosinus podczas wypuszczania ϕ równe 0. Równanie, które ostatecznie uzyskasz, jest następujące:

$$\theta(t) = \frac{\pi \cos\left(\sqrt{\frac{9.81}{2}}\right)}{4}$$
$$= \frac{\pi \cos\left(\sqrt{\frac{9.81}{2}}t\right)}{4}$$
$$= \frac{\pi \cos(2.2147 \cdot \mathrm{t})}{4}$$

Ten typ równania może być niezwykle użyteczny, jeśli planujesz stworzyć grę taką jak Spider-Man lub stare Nintendo Commando, w którym postać zmienia się z miejsca na miejsce. W tej sytuacji postać jest masą, a amplituda jest zawsze kątem, w którym postać rzuca swoim urządzeniem zahaczającym. Dodatkowo, ? w tym przypadku zawsze wynosi 0, co sprawia, że rzeczy są proste (względnie rzecz biorąc).

Uwaga

Tego typu funkcje są niezwykle obciążające procesor. Miej oczy otwarte w tym tekście cztery ostatnie części, aby uzyskać porady dotyczące optymalizacji takich operacji. t i p W Maple możesz obliczyć rozwiązanie do ODE za pomocą polecenia dsolve (<równanie ODE>, <funkcja>) ;, i możesz reprezentować różnice wartości używając diff (<funkcja>, <parametr>); funkcjonować.

Sprężyny

W programowaniu gier istnieje kilka interesujących problemów, które można rozwiązać za pomocą sprężyn - ze względnie prostymi równaniami, do rozruchu. W rzeczywistości jest tak wiele przypadków, w których można używać sprężyn w grach, o których można by napisać całe książki. Rzeczywiście, jedną z największych zalet sprężyn jest to, że można ich używać do generowania efektów, które wykraczają poza ich oczywistą formę (czyli metalową sprężynę). Na przykład możesz użyć efektu ciągu w następujących scenariuszach:

■ Ciągi

■ Sprężysta siła tłumienia

■ Symulacja tkaniny

■ Galaretka

Dodatkowo można zastosować różne siły do sprężyn, aby stworzyć ciekawe efekty. Zanim jednak przejdę do szczegółów różnych efektów, które możesz stworzyć za pomocą sprężyn, zobaczmy, jak możesz określić równanie, które daje pozycję sprężyny z czasem. Po pierwsze, należy pamiętać, że zachowanie sprężyny zależy od odległości kompresji lub dekompresji. Oznacza to, że im bardziej ściskasz sprężynę, tym większa będzie ona odbijała się po jej zwolnieniu, chyba że, oczywiście, skompresujesz ją tak bardzo, że ulegnie ona deformacji lub zostanie całkowicie zniszczona. Mówiąc bardziej naukowo, im mocniej naciskasz na sprężynę, tym większa siła sprężysta wywiera na palce. Podobnie, gdybyś naciągnął sprężynę, zauważyłbyś, że im bardziej jest rozciągnięta, tym trudniej ją rozciągnąć. Ponownie, w bardziej naukowych kategoriach, im bardziej naciągasz sprężynę, tym większa siła, która przyciąga sprężynę do pierwotnego położenia. (Oczywiście, jest to tylko częściowo prawdą, ponieważ sprężyna zazwyczaj osiąga punkt, w którym jeśli zostanie ściśnięty lub rozciągnięty zbyt mocno, to albo pęknie, albo zostanie zredukowany do otwartego cylindra). Przy tej prostej dedukcji nie powinno to być zbyt trudne. aby zobaczyć, że siła przywracania sprężyny jest funkcją odległości ściskającej / rozciągającej. Z tego powodu naturalna pozycja spoczynkowa sprężyny nie powinna mieć żadnej siły przywracającej - lub, inaczej mówiąc, siła powinna być zerowa. Można zatem powiedzieć, że siła przywracania jest zdefiniowana następująco dla sprężyny o stałej odbudowie współczynnik k:

$F_r = kd$

Uwaga

W zależności od tego, jak zdefiniujesz k, czasami możesz zobaczyć ujemną wartość tego równania.

Ta funkcja jest kolejną ODE. Jeśli ją rozszerzysz, zauważysz, że przyspieszenie jest podany jako funkcja odległości:

ma = kd

To równanie nieco różni się od poprzedniego, ale nadal jest równaniem oscylacyjnym, gdy jest napisane w funkcji położenia sprężyny. Jeśli obliczysz rozwiązanie ODE, otrzymasz, że równanie jest dokładnie takie samo na wyższym poziomie, ale że częstotliwość i amplituda są różne. Równanie, które definiuje położenie masy przymocowanej do końca sprężyny, jest następujące:

$$x(t) = A\sin(wt+\phi)$$

$$A = \sqrt{\frac{m{v_0}^2}{k} + {x_0}^2}$$

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right)$$

W tym scenariuszu x_0 jest początkowym rozciągnięciem (ujemne implikuje kompresję), a v_0 jest prędkością początkową. Załóżmy na przykład, że Super Mario skacze na wiosnę i leci w powietrzu. Biorąc pod uwagę, że k = 500 i że Mario waży 200 jednostek masy, ile on skompresuje sprężynę? Jeśli narysujesz wykres sił, zobaczysz, że masz dwie siły w grze: siłę przywracającą sprężynę i siłę grawitacji. Jeśli sumujesz oba, możesz wyizolować przyspieszenie:

$$\sum F_y = 0$$

$$0 = -mg + kx$$

$$x = \frac{mg}{k}$$

$$= \frac{200 \cdot 9.81}{500}$$

$$= -3.9$$

Pierwszym krokiem jest określenie, ile sprężyny zostanie skompresowane. Wiesz to gdy Mario siedzi na źródle, będzie punkt, w którym siła grawitacji wyrówna siłę przywracającą sprężynę. A co z zbiorem? Czy osoba wypuszczona ze źródła - powiedzmy, trampolina - nie będzie miała większego przyspieszenia w przeciwnym kierunku? Innymi słowy, czy ta osoba nie wzleciałaby wyżej niż wysokość, na której się rozpoczęła? Cóż, to zależy. Kiedy osoba wskakuje na trampolinę, zwykle wywiera siłę skierowaną w dół, wydłużając i prostując kolana podczas skoku. Jeśli jednak ta osoba miałaby trzymać kolana prosto, nie podnosiłaby się wyżej niż wysokość, z której spadł. Co naprawdę powoduje, że ta osoba wystaje w górę, jest prostym faktem, że pcha się w dół, co dodatkowo kompresuje sprężynę. Tak więc w tym przypadku przyspieszeniem, jakie osoba osiąga, jest grawitacja plus dodatkowa siła wywierana przez zginanie i prostowanie kolan. Jeśli planujesz użyć sprężyn w grze, możesz zakodować siłę skoku dla swoich postaci i dodać ją do grawitacji, aby obliczyć przyspieszenie. Nie jest to jednak świetny model, ponieważ nie bierze pod uwagę szybkości. W końcu, ponieważ postać spada z wyższych budynków, powinien oczywiście odbić wyżej, prawda? Aby rozwiązać takie problemy, lepiej jest użyć modelu energetycznego. W tym przypadku energia potencjalna jest po prostu całką siły, a energia kinetyczna jest taka sama, jak poprzednio. W skrócie, równanie dla energii potencjalnej U i energii kinetycznej K jest następujące:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2\left(wt + \phi\right)$$
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mw^2 A^2 \cos^2\left(wt + \phi\right)$$

Jeśli rozumiesz związek między x i v (wskazówka: v jest pochodną x), to powinny to być całkiem proste dedukcje. Teraz możesz coś z tym zrobić. Biorąc pod uwagę prędkość Mario, gdy x = 0, możesz obliczyć całkowitą energię systemu, ponieważ energia potencjalna jest w tym punkcie. Następnie można obliczyć maksymalną kompresję x, gdy prędkość v wynosi 0, stosując równanie energii kinetycznej. Znając kompresję, można podstawić x do równania siły, aby określić, jakie będzie przyspieszenie w tym punkcie. Nie powinno dziwić, że wiosna uruchomi Mario z powrotem do swojej pierwotnej wysokości. Aby uwzględnić skok wykonany przez Mario, wystarczy dodać impulsu, tak jak to opisano w części 8. To rzeczywiście zadba o problem. Nałożony impuls kompresuje sprężynę jeszcze bardziej, co spowoduje, że Mario pójdzie wyżej.

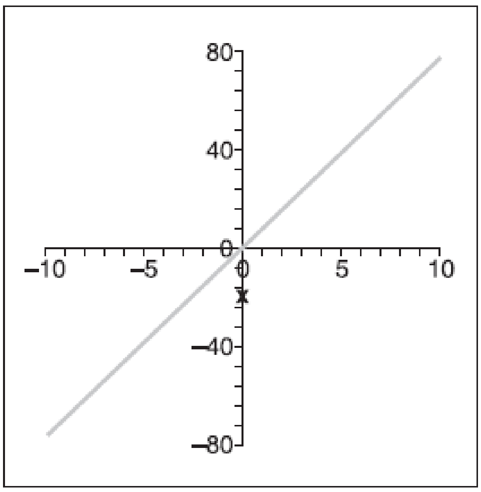
Łańcuchy

W Pensylwanii, gdzie nietoperze latają nisko i zamieniają się w makabryczne wampiry, odważny mężczyzna wchodzi z biczem pod ręką, aby pokonać wampira znanego jako Dracula. Brzmi znajomo? To ustawienie dla znanej serii gier Castlevania. Ta gra jest interesująca głównie z powodu bata. Jeśli planujesz stworzyć grę 3D związaną z biczem, potrzebujesz sposobu, aby bicz wyglądał realistycznie. Wprowadź użycie łańcuchów, które są również przydatne do symulacji takich obiektów jak ogony, mosty z drewnianymi deskami i podobne obiekty. Oczywiście, z racji tego, że masz do czynienia z fizyką, istnieje wiele modeli do wyboru, aby stworzyć ten efekt, ale najłatwiejszy jest bez wątpienia model ciąg-masa. Pomysł polega na utworzeniu sznurka poprzez modelowanie go za pomocą zestawu mas oddzielonych odległością x i połączonych ze sobą za pomocą sprężyn, jak pokazano na rysunku 9.6.

Model jest dość prosty, ponieważ jest niczym więcej jak zestawem połączonych ze sobą sprężyn. Jedynym poważnym problemem jest to, że koszt obliczeniowy rozsądnie długiego ciągu będzie bardzo wysoki. Funkcje cosinus i sinus są dość kosztowne i trzeba się ich pozbyć presto. Początkowo równanie dla siły przywracania zastosowanej przez sprężynę było całkiem proste. Problem pojawił się, gdy rozwiązałeś ODE i uzyskałeś funkcję transcendentalna (sinus). Na szczęście istnieje inna metoda integracji, do której można się odnieść: metoda dalszego różnicowania Eulera, która jest zwykle używana w optymalizacji. Część 12, "Zamykanie luki w przybliżeniu numerycznym", wykorzystuje wyspecjalizowaną wersję tej funkcji do optymalizacji wielomianów bez utraty dokładności, ale w tej sytuacji nie ma wielomianów. Zamiast tego masz przyspieszenie i odległość od naturalnej odległości sprężyny. Metoda jest imponująco prosta, wycinając wszystko na kroki o stałej długości i przepisując równanie, jak pokazano tutaj:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t f'(\mathbf{x}_n)$$

Czy to równanie ma sens? Jak się okazuje, tak jest. Jeśli pamiętasz rozdział dotyczący metod numerycznych w części 7. przypominasz sobie , że wszystkie metody opierały się w zasadzie na tej samej zasadzie: Oblicz obszar pod krzywą, sumując obszar kwadratów, których wysokości zostały podane przez funkcję f (x) i których długości zostały określone przez liczbę interwały. Ta metoda faktycznie mówi to samo. Jeśli masz wartość x_n, następna wartość interwału delta t jest w rzeczywistości wartością bieżącą plus całką funkcji prędkości z x_n plus delta t. Wybierz linię pokazaną na rysunku 9.7.



Możesz łatwo zauważyć, że to równanie ma sens dla linii. Biorąc pod uwagę dowolny punkt, możesz dodać krok pomnożony przez nachylenie, aby uzyskać x w miejscu (x + krok). Możesz również zastosować tę rekurencyjnie tę logikę. Innymi słowy, zastosuj równanie do przyspieszenia, następnie do prędkości, a następnie do pozycji. Powinieneś także być w stanie zobaczyć, że działa to nie tylko dla wielomianów, ale także dla sinusa, cosinusu i prawie każdej innej funkcji. Jedyne, co musisz zachować ostrożność, to to, że krok czasu nie jest zbyt duży; w przeciwnym razie równanie jest niestabilne numerycznie. Podobnie jak w przypadku problemów z integracją numeryczną, można znaleźć przypadki, w których dokonywane przybliżenie jest zbyt grube. Na przykład, jeśli krok czasu jest taki, że powoduje zmianę x z 3 na 5, to w następnym kroku liczba od 5 do liczby mniejszej niż 3. Wynika z tego, że ciąg kończy się samoistnie. niszczenie. W rzeczywistości, z małym krokiem czasu, struna oscyluje.Tak jak zastosować tę technikę do swojego równania? Proste, naprawdę; macie podstawowe równanie, więc wszystko, co musicie zrobić, to odróżnić to równanie za pomocą metody Eulera. Poniżej przedstawiono pomysł:

$$\begin{aligned} F_p &= F_a + F_b \\ ma &= k(x+y) \\ a &= \frac{k(x+y)}{m} \end{aligned}$$

Pierwszym krokiem jest napisanie równania w zależności od przyspieszenia, ponieważ jest to najwyższy rozkaz, jaki masz. W tym równaniu punkt p jest definiowany jako punkt, który chcesz obliczyć. Ponieważ bierzesz tylko pod uwagę siłę przyłożoną między dwoma sąsiednimi punktami (a i b), obliczasz siłę wywieraną na p jako sumę siły pochodzącej z a i b, każda z p. Następnym krokiem jest obliczenie prędkości masy. Jest to rzeczywiście pierwszy krok w kierunku dalszego różnicowania Eulera. Oto co pokazuje:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \Delta t \cdot v_0 ' \\ &= v_0 + \Delta t \cdot a \\ &= v_0 + \frac{\Delta t \cdot k}{m}(x+y) \end{aligned}$$

Teraz znasz prędkość masy. Ostatnim krokiem jest kolejne różniczkowanie w celu obliczenia przesunięcia, z którego cząstka cierpi:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \Delta t \cdot x_0 ' \\ &= x_0 + \Delta t \cdot v \\ &= x_0 + \Delta t \cdot v_0 + \frac{\Delta t^2 \cdot k}{m}(x+y) \end{aligned}$$

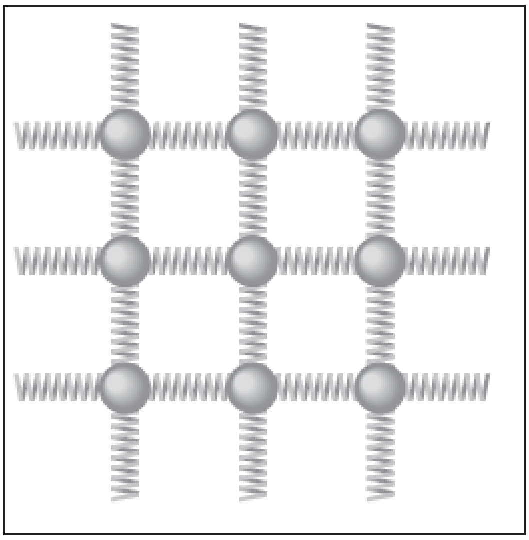
Z powodzeniem przekształciłeś brzydkie równanie z sinusem w dość proste równanie. Pamiętaj, że wartości x tutaj nie są wartościami bezwzględnymi; raczej są one związane z naturalną pozycją sprężyny. Jeśli chcesz spojrzeć na nie w bardziej uporządkowany sposób, wartości x są naprawdę w "wiosennej przestrzeni". W tym modelu jest jeszcze jedna skaza: w idealnym świecie, w którym nie ma tarcia, sprężyna będzie odbijać się w nieskończoność . Jednak realistycznie, powietrze w otoczeniu wywoła tarcie na wiosnę, powodując jego spowolnienie. Aby naprawić tę wadę w modelu, musisz wprowadzić do niej pojęcie siły tłumienia, jak wkrótce zobaczysz. Sztywność bata można symulować za pomocą sprytniejszego pozycjonowania sprężyn, co proponuje następna sekcja.

Wskazówka

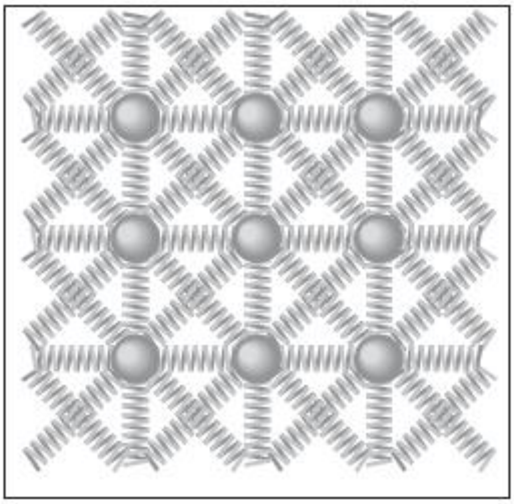
Struny mogą być używane do włosów twoich postaci. Jeśli chcesz nadać włosom większą głębię, możesz po prostu uważać każdą część włosów za środek elastycznego cylindra, a zatem możesz obliczyć pierścienie w różnych ustalonych odstępach czasu. Struny są również przydatne do symulacji trawy.

Płótno

Linia jest podobna do łańcucha, ponieważ zawiera tylko jeden parametr (który możesz wywołać t). Podobnie płaszczyzna, która ma dwa parametry, może być podobna do tkaniny, która, podobnie jak sznur, może być użyta do stworzenia całkiem interesujących efektów. Na przykład możesz użyć szmatki do symulacji skóry postaci; po prostu umieść szmatkę na siatce i tak ją nakreślić, aby niektóre kluczowe obszary pozostały na swoim miejscu. W ten sposób możesz sprawić, że postać będzie się uśmiechać, marszczyć brwi, śmiać się i tak dalej, tylko przesuwając niektóre kluczowe punkty materiału. A ponieważ skóra ma charakter gumowaty, wiosenna natura materiału powinna umożliwiać prawidłowe ruchy twarzy. Płótno świetnie nadaje się również do robienia ubrań dla postaci i do robienia flag. Podczas gdy płaszczyzna jest zbiorem linii powtarzanych w nieskończoność, jedna obok drugiej, tkaninę można postrzegać jako skończony zestaw sznurków umieszczonych jeden obok drugiego, jak pokazano na rysunku 9.8.



Jak widać na rysunku 9.8, sprężyny w tkaninie są "tkane" - czyli umieszczone na osi poziomej i pionowej między masami. Gdyby tak nie było, model po prostu zachowywałby się jak wiązka niepowiązanych strun. Musisz to mieć na uwadze podczas obliczania siły pomiędzy sprężynami. W szczególności trzeba obliczyć siłę działającą na oś pionową i siłę działającą na oś poziomą. Jeśli dobrze zrozumiałeś łańcuchy, zobaczysz, że szata jest tylko rozszerzeniem tego. Tam, gdzie poprzednio, podczas pracy z ciągami, miałeś tylko x i y, teraz masz cztery źródła do rytmu. Nadal musisz podzielić łańcuch na trzy osie x, y i z. Jeśli jednak zaimplementujesz tego typu tkaniny w grze, zauważysz, że nie radzi sobie zbyt dobrze. Na przykład, jeśli przekrzywisz szmatkę, naturalna odległość sprężyn w tkaninie nie zostanie naruszona; jest po prostu wypaczony. Naturalna odległość sprężyny to odległość, przy której sprężyna nie jest ściskana ani rozciągnięta. W związku z tym, jeśli mocno przechylisz struny w tkaninie, wprowadzisz duże zniekształcenia, które sprawią, że tkanina stanie się nienaturalna. Rozwiązaniem jest wprowadzenie dwóch nowych zestawów sprężyn tworzących "X" pomiędzy każdym małym blokiem czterech mas, jak pokazano na rysunku 9.9.



Uwaga

W rzeczywistości jedna przekątna sprężyna byłaby wystarczająca do wyeliminowania ciężkich zakrzywień, ale dodaję dwa, aby zaprogramować szmat, by zachowywał się symetrycznie.

Oczywiście można ulepszyć model, biorąc pod uwagę jeszcze więcej sprężyn i cząstek. Na przykład można rozważyć siłę przyłożoną do 23 otaczających sprężyn. To rzeczywiście dałoby bardziej realistyczny model, ale także znacznie wolniejszy model. W rzeczywistości każda sprężyna w tym modelu powinna wpływać na cząstkę, którą oceniasz. W grze nie można sobie pozwolić na tak dużą liczbę obliczeń, a prosty model i tak wygląda całkiem nieźle. Pozostaje tylko pytanie, ile sprężyn daje dobry efekt i jaka siła powinna być zastosowana do każdego z nich. Jest to głównie kwestia prób i błędów, ponieważ tak naprawdę zależy od nich ilość procesora, którą można zmarnować.

Wskazówka

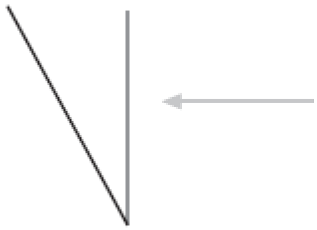
Aby symulować deformację twarzy za pomocą szmatek, wystarczy zabić punkty kotwiczące na skórze. Jeśli nos bohatera jest zdmuchnięty, na przykład, możesz po prostu pominąć sprężyny i punkty zaczepienia związane z nosem, a zobaczysz, jak wszystko opuszcza się w dół, gdzie znajdował się nos.

Galaretka

Widzieliście efekty sprężyn na liniach i samolotach; a co z przedmiotami 3D? Gdyby dodać jeden wymiar, otrzymalibyśmy galaretowatą formę. Modele galaretki są niezwykle przydatne w grach. Na przykład modele galaretek byłyby dobrym rozwiązaniem, gdybyś chciał dokładnie modelować postaci, które zostały zgniecione lub rzucone, cierpiące deformacje twarzy i inne. Modele galaretki są również całkiem dobre do symulacji wszelkich obiektów gumopodobnych, które są rzucane. Na przykład, Hitman użył galaretowatego modelu. Kiedy postać została postrzelona, zestaw punktów został przesunięty do tyłu i cały zestaw masy nastąpił. Ponieważ projektanci nie chcieli, aby cały aparat był obliczany jako ciągi, użyli po prostu stickmana i dołączali do niego różne elementy wielokątów. Możesz myśleć o stickmanie jako o "kości" postaci, na której dodali "mięso". Prawdopodobnie ich model może lepiej pasować do tkaniny niż galaretki, ale w przypadku realistycznych modeli postaci galaretka jest sposobem, aby chcesz symulować złamane twarze, strzaskane kości i tym podobne. Pomysł stworzenia modeli żelowych jest prosty: weź materiał 2D i rozciągnij sprężyny tak, aby wypełniały kształt 3D. Aby to zilustrować, rozważ kostkę Jell-O, która ma osiem wierzchołków. Musisz dodać co najmniej jedną sprężynę do ramy każdego segmentu kwadratowego, inny zestaw sprężyn, aby uwzględnić pochylenie w poziomie i pionie, a także inny zestaw sprężyn do uwzględnienia pochylenia głębokości. Krótko mówiąc, aby uzyskać stabilny kawałek Jell-O, musisz połączyć każdy z ośmiu wierzchołków z pozostałymi siedmioma wierzchołkami. Kiedy zajmujesz się obiektami 3D, które chcesz zachować w sposób sprężysty, musisz być bardzo ostrożny przy ustawianiu sprężyn. Kiedy projektujesz model galaretki, musisz się zastanowić, jak zachowa się model, kiedy trzymasz go z różnych punktów widzenia. Jak pokazano w poprzednim przykładzie, musisz dodać sprężyny w oczywistych stawach, ale ponieważ musisz również uważać na pochylenie obiektu pod wpływem grawitacji, musisz dodać kolejny zestaw sprężyn w przekątnej, aby się tym zająć. Pomyśl o tym jak o kijku. Gdybyś miał stworzyć ten oparty na ołówku model kija, mógłbyś go zawalić, przesuwając ołówki?

Stosowanie sił w sprężynie

Sam, sznurek, szmatka lub glob galaretki ma ograniczone zastosowanie. Aby je ożywić, musicie zastosować do nich siły - przede wszystkim grawitację. Takie postępowanie jest proste; po prostu dodajesz mg do prędkości w y. To może zabrzmieć dziwnie, dodając siłę do prędkości, ale to właśnie podpowiada nam metoda przekazania Eulera. Najtrudniejszą częścią jest rozliczanie kolizji między cząstkami i różnymi obiektami, które występują z powodu grawitacji. Kolejną siłą, która może być interesująca w pracy, jest wiatr, który można wykorzystać do symulacji flag i wody. Na przykład, jeśli uznasz powierzchnię ciała za ściereczkę, możesz zastosować wiatr do tkaniny (wody), aby ją poruszyć. To nie będzie tak realistyczne, jak niektóre twarde dynamiki płynów, ale zrobi to w szczyptę dla większości gier. Możesz użyć podobnej strategii do symulacji efektów wiru powietrznego; po prostu dołącz pęczek liści do niewidocznych określonych węzłów i zakręć materiał w cylindrycznym ruchu (tutaj może być przydatne cylindryczne miejsce współrzędnych). Tak długo, jak przeciągasz w dowolnym miejscu od dwóch do czterech punktów na jednej krawędzi materiału, tkanina nie zwinie się w linię, a zamiast tego będzie wyglądać jak mały wir, który powoduje ruch liści. (Ta sama technika może być zastosowana do stworzenia efektu generowanego przez śmigłowiec Apache w pobliżu wody.) W jaki sposób wdrażasz wiatr? Po pierwsze, należy zauważyć, że wpływ wiatru zależy od kąta, z jakim uderza w powierzchnię. Aby to zilustrować, umieść kartkę papieru na biurku i uderz w nią z boku; zauważ, że porusza się znacznie. Jeśli, z drugiej strony, dmuchniesz w niego bezpośrednio z góry, nie zmieni się on, nawet jeśli siła przyłożona do niego jest większa, ponieważ biurko zapewnia równą siłę w przeciwnym kierunku. Hmm. Czy czuję cosinus? Po drugie, zauważ, że siła przyłożona do łaty jest większa, jeśli powierzchnia jest większa. Aby to zilustrować, upuść kartkę papieru i długopis. Który z nich spadnie pierwszy? Prawdopodobnie długopis, ponieważ papier będzie miał duży opór ruchu ze względu na opór powietrza. Problem wiatru wiejącego na powierzchni jest taki sam, jak uderzenia powietrza w powierzchnię, ponieważ powierzchnia się porusza. Na koniec dokonujesz uproszczonego przybliżenia, jeśli chodzi o siłę wiatru, co daje dość rozsądny efekt wiatru i wiatru. To nie jest najlepszy model, ale działa na coś tak prostego jak ten. Chodzi o to, aby przesunąć powierzchnię wzdłuż jej normalnego wektora. Należy zauważyć, że nachylona postać może otrzymać mniej wiatru niż powierzchnia, która jest bezpośrednio umieszczona na wietrze (to jest, prostopadle). W rzeczywistości liczy się rzut prostopadły do wiatru, jak pokazano na rysunku



Śledząc wykonane przybliżenia, a także obserwacje, następujące równanie ma sens dla tej symulacji:

$$F_w = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|_2}(\mathbf{n} \bullet \mathbf{w})$$

W języku angielskim siła wiatru F_w równa się jednostkowo-normalnemu wektorowi powierzchni tkaniny uważanej za renormalizowaną, tak, że jej długość jest rzutem. Produkt dot zajmuje się kątem, a wektor normalny dba o kierunek. Ten rodzaj wiatru jest nazywany wiatrem liniowym, czyli jest zasadniczo równy we wszystkich płaszczyznach. Oczywiście liniowy wiatr jest tylko jednym rodzajem wiatru. Inne zachowania wiatrowe obejmują

■ Posiadanie "źródła wiatru", takiego jak helikopter, który kieruje wiatr w kierunku określonej łaty.

■ Wiatr cylindryczny, tak jak w przypadku wiatru przelatującego przez silnik odrzutowy cylinder, prędkość wiatru jest w kierunku dołu i równa na całej planszy; na zewnątrz w cylindrze można ustalić równanie opisujące siłę i kierunek wiatru w zależności od pozycji <x, y, z> łaty.

■ Sferyczny wiatr, w którym siła przyłożona do łaty to nic innego jak wektor utworzony ze środka kuli do łaty. Ponieważ wiatr powinien się zmniejszać w miarę oddalania się od środka kuli, musisz upewnić się, że siła jest odwrotnie proporcjonalna. Na przykład, takie równanie mogłoby to zrobić, gdzie s jest środkiem sfery, a p jest środkiem łatki (lub siatki trójkątnej):

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{s} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{s} - \mathbf{p}\|_2^2}$$

Tłumienie sprężyny

Równanie zostało przedstawione w części 8 w celu uwzględnienia tłumienia w środowisku. Gdyby pamiętasz, to było złożone równanie wykładnicze na poziomie pozycyjnym. Na poziomie prędkości ustalono, że czynnikiem tłumiącym było przyspieszenie podzielone przez k. Dlaczego powinno być tu inaczej? (Ponieważ masz tutaj już k, współczynnik tłumienia powinien być d, aby uniknąć nieporozumień.) Wszystko, co musisz zrobić, aby wywołać tłumienie, to wprowadzić czynnik, który obejmuje zakres od 1 do 0; następnie po prostu pomnóż współczynnik przez oryginalną prędkość v0.

Uwaga

Wolę używać mnożenia zamiast podziału, głównie dlatego, że mnożenie odbywa się znacznie szybciej na komputerze. Możesz łatwo podzielić, jeśli po prostu pomnożysz przez odwrotność (to jest pomnożyć przez 1 / x).

Równanie z nowym współczynnikiem tłumienia d wynosi zatem:

$$v = v_0 \cdot d + \frac{\Delta t \cdot k}{m}(x + y)$$

$$x = x_0 + \Delta t \cdot v$$

Wartości, które wybierzesz dla d i k, zależą od rodzaju obiektu, który chcesz utworzyć. Wartość tłumienia wynosząca 1 oznacza, że struna będzie poruszać się w sposób ciągły, podczas gdy wartość tłumienia 0 spowoduje, że sznur będzie naprawdę trudny. Jeśli więc, na przykład, projektowałeś bicz, prawdopodobnie wybierzesz wartość, która była bliska, ale mniejsza niż 1-powiedzmy, 0,9, aby bicz był wystarczająco elastyczny, ale nie taki, aby poruszał się stale. Współczynnik tłumienia stale zmniejsza prędkość obiektu o pewien czynnik, co powoduje mniej chaotyczne zachowanie. uwaga Jeśli wybierzesz wartość większą niż 1, cząsteczki zyskają energię, co oznacza, że nie tylko one poruszać się w sposób ciągły, będą one faktycznie zwiększać ruch w czasie. To oczywiście nie jest droga, ponieważ zgodnie z prawem zachowania energii cząsteczki nie mogą uzyskać energii bez jakiegoś innego elementu tracącego energię. Poza tym, jeśli wybierzesz wartość większą niż 1, cząstki będą miały ostatecznie nieskończoną prędkość, co nie jest pożądane. Możesz także skorzystać z tego, że masa może się zmieniać w różnych punktach wzdłuż sznurka. W ten sposób, jeśli robisz bicz, możesz ustawić go tak, aby uchwyt był znacznie cięższy niż końcówka. Wtedy wszystko, co musisz zrobić, aby bicz wszedł w działanie, to przesunąć jedną lub dwie ostatnie cząstki zgodnie z ruchem ręki postaci. Ze względu na ciągłą matematykę za tym wszystkim, cały bicz powinien zachowywać się jak sprężysty gumowy sznur. Oczywiście oznacza to również, że bicz może spaść na dwa pojedyncze punkty. Aby temu zapobiec, należy dodać więcej sprężyn od, powiedzmy, masy 0 do masy 2. W ten sposób nie tylko masa byłaby powiązana z masą i + 1, ale także byłaby powiązana z masą i + 2 i i + 3 oraz tak dalej, dopóki nie poczujesz, że twój bicz jest wystarczająco naturalny. Oczywiście czynniki musiałyby być dostosowane tak, aby pierwsza masa nie miała tak wielkiego wpływu na ostatnią masę, ponieważ odległość jest większa od poprzednich mas. Do tej pory równanie zostało podane tylko w dwóch wymiarach, ale można łatwo rozszerzyć tę koncepcję do 3D. Po prostu użyj poprzedniego równania dla x, y i z, ale oblicz każdy komponent osobno. Jedynym problemem jest to, że x i y są naprawdę odległościami, co oznacza ciebie muszą obliczyć długość odległości w x, y i z. Później musisz uważać, aby rozłożyć różne osie. Poniższy pseudo-kod pokazuje to:

```
Ax     = X[i - 1] - X[i];
Ay     = Y[i - 1] - Y[i];
ANorm  = sqrt(sqr(Ax) + sqr(Ay));
Ax     = Anorm - NaturalSpringLength;          // Spring's x in F = kx


Bx     = X[i + 1] - X[i];
By     = Y[i + 1] - Y[i];
BNorm  = sqrt(sqr(Bx) + sqr(By));
Bx     = Bnorm - NaturalSpringLength;          // Spring's x in F = kx

Vx     = (Ax * ax / ANorm) + (Bx * bx / BNorm);// These are only (x + y)
Vx     = (Ay * ax / ANorm) + (By * bx / BNorm);// as expressed in the equation
                                                // VO = vo*d + Dt*k*(x + y)/m
```

Środek Masy

Jeśli rzucisz młotkiem, zauważysz, że punkt, w którym obraca się młotek, nie jest w rzeczywistości środkiem młotka. Ponieważ głowa młotka jest znacznie cięższa niż rękojeść, rączka wydaje się obracać szaleńczo wokół głowy. Podobnie, jeśli napełnisz piłkę wodą i wyrzucisz ją, zauważysz, że piłka faktycznie nie obraca się od środka; zamiast tego wydaje się, że porusza się harmonicznie, poruszając się do przodu. Początkowo sposobem rozwiązania problemu było przedstawienie obiektu jako abstrakcyjnego punktu, w którym zastosowano siły. Podobnie, biorąc pod uwagę tylko jeden punkt, powiedzieliśmy, że obiekt miał prędkości a, przyspieszenia b, i tak dalej. W rzeczywistości jednak tak naprawdę aprobowaliśmy tylko model, który dla rotacji nie jest bardzo dobry. Lepszy model można osiągnąć, badając środek masy. Środek masy to pojedynczy punkt gdzieś w przestrzeni (tak naprawdę nie musi to być na samym obiekcie), który reprezentuje punkt, w którym masz tyle masy po jednej stronie, ile masz na innej stronie. (Jeśli brzmi to znajomo, to dlatego, że środek masy jest również wirtualnym punktem, nad którym pracowałeś od czasu Rozdział 8.) W rzeczywistości, gdybyś mógł znaleźć środek masy dla dowolnego obiektu z nieskończoną precyzją, możesz umieścić obiekt na cienkim gwoździu i obiekt byłby dobrze zrównoważony. Jeśli obiekt spada na jedną lub drugą stronę, dzieje się tak dlatego, że jeden z dwóch boków - konkretnie strona, do której obiekt się zbliża - ma większą masę niż druga. Ten konkretny przykład działa tylko w 2D, ale to samo dotyczy 3D. Środek masy w 3D jest punktem, w którym jest tyle masy na dowolnych dwóch bokach kształtu, aby podzielić kształt na dwie części. Środek masy zależy od odległości cząstek składających się na obiekt od środka obiektu. Wymuszenie równowagi na bokach dla dwóch mas m1 i m2, odpowiednio w odległości xiy, od środka masy c, daje:

$$m_1(c-x)=m_2(c-y)$$

Biorąc pod uwagę to proste równanie, możesz wyodrębnić środek masy, aby uzyskać następujące wartości:

$$c=\frac{m_1x+m_2y}{m_1+m_2}$$

Bardziej ogólnie, jeśli masz n obiektów, środek masy jest sumą masy obiektów pomnożonej przez ich odległość, której iloczyn jest następnie dzielony przez sumę ich mas. W krótkiej notacji dla odległości x_i znajduje się:

$$c=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$$

Wracając do przykładu młota, załóżmy, że twój młot składa się z głowy i rączki, dla których znasz ciężar i środek. W szczególności uchwyt jest wyśrodkowany na <0, 0> i ma masę 1, a głowa jest wyśrodkowana na <0, 10> i ma masę 10. Aby znaleźć środek masy dla tego systemu, należy obliczyć w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
c_x &= \frac{\langle 0,0\rangle \cdot 1 + \langle 0,10\rangle \cdot 10}{1+10} \\
&= \left\langle 0, \frac{10}{11} \right\rangle
\end{aligned}
$$

Zwróć uwagę, w jaki sposób formuła jest stosowana zarówno do komponentu x, jak i y. Dzieje się tak dlatego, że jeśli obiekt zostanie przecięty na dwa elementy wzdłuż osi X, Y lub dowolnego innego komponentu, środek masy pozostaje nadal w posiadaniu. Aby rozwiązać problem, potrzebujesz dwóch równań do rozwiązania dla dwóch niewiadomych. Można naprawdę przeciąć obiekt na dwa dowolne sposoby, niezależnie od osi, ale ponieważ x i y są proste i naturalne, tak to się dzieje. To świetnie by pasowało do modelu z galaretką. Co dziwne, jest to nadal przybliżenie środka masy. Aby być poprawnym fizycznie, należy obliczyć, aby uzyskać gęstość stosowanego materiału i sumować małe kostki masy pomnożone przez ich gęstość. Krótko mówiąc, jest to integralna pozycja obiektu ze środka pomnożona przez gęstość:

$$
c = \frac{1}{\int 1} \int \mathbf{x} \cdot dm
$$

W terminologii laika wartość jest nieskończoną sumą odległości pomnożonej przez gęstość, której iloczyn jest następnie dzielony przez całkowitą masę reprezentowaną przez całkę równą 1 w całym regionie. Na przykład weź prostą płytę. Już wiesz z prostej logiki i symetrii, że środek koła jest środkiem masy, ale żeby wyjaśnić to całkami, poniższy przykład pokazuje, w jaki sposób jest uzyskiwany:

$$
\begin{aligned}
c_x &= \frac{\int_{-10}^{10} \int_{-\sqrt{10^2-y^2}}^{\sqrt{10^2-y^2}} p(x,y) \cdot x \cdot dx \cdot dy}{\int_{-10}^{10} \int_{-\sqrt{10^2-y^2}}^{\sqrt{10^2-y^2}} p(x,y) \cdot dx \cdot dy} \\
&= \frac{\frac{p}{2} \int_{-10}^{10} x^2 \Big]_{-\sqrt{10^2-y^2}}^{\sqrt{10^2-y^2}}}{p \int_{-10}^{10} 2\sqrt{10^2-y^2}} \\
&= \frac{\int_{-10}^{10} \left(10^2-y^2\right) - \left(10^2-y^2\right)}{2\cdots} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Całkujesz we współrzędnych kartezjańskich. Główną zmienną integrującą jest y, a ty najpierw całkujesz y = -10.10, a następnie całkujesz w x, która jest granicą okręgu w x. Funkcja, którą całkujesz, jest odległością w x pomnożoną przez funkcję gęstości. W takim przypadku zakłada się, że dysk ma jednolitą gęstość; tak więc p (x, y) jest naprawdę stały i można go wyciągnąć z całki. Na dole oblicza się całkowitą gęstość dysku, obliczając całkę gęstości. Zysk, ponieważ gęstość jest stała, jest to to samo, co obliczanie obszaru dysku, a następnie pomnożenie go przez gęstość, czyli stała jest wyciągnięta poza integralną. Proces integracji trwa, dopóki nie osiągniesz punktu, w którym całka wynosi 0 u góry, a zatem całe rozwiązanie wynosi 0.

Siły kątowe

Wcześniej widziałeś, jak siła została powiązana z tłumaczeniem obiektu. Niejawna siła została przyłożona do środka masy obiektu. Aby to zilustrować, wyobraź sobie, że umieściłeś książkę na stojąco; pchnij środek książki, a zauważysz, że odsuwa się od ciebie. W przeciwieństwie do tego, weź tę samą książkę i pchnij ją na jej brzeg; zauważysz, że książka obraca się wokół. Jest to w rzeczywistości ogniwo wiążące siłę i nową koncepcję zwaną momentem obrotowym. W tym przypadku, w wyniku tarcia, książka obraca się z drugiej strony, gdy naciskasz ją po jednej stronie, ale w świecie bez tarcia obracałaby się ona od środka ciężkości. Jeśli przyłożymy siłę poza środek masy do obiektu o stałej osi obrotu, generowany jest moment obrotowy. W skrócie, moment obrotowy jest analogiem siły dla obrotów. W książkowym przykładzie książka nie jest ustalona wzdłuż osi tak, że może się obracać, ale siła tarcia częściowo symuluje ten efekt. Podobnie, jeśli jedziesz samochodem do innego samochodu z boku i na zderzaku, prawdopodobnie zauważysz, że samochód nie jest od ciebie odgarnięty. Zamiast tego, samochód może wirować w kółko, odsuwając się od ciebie. Wszystko to z powodu momentu obrotowego. Pochodzenie tej formuły jest długotrwałe, więc przejdę od razu do sedna. Równanie momentu obrotowego podano w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\tau &= I\alpha \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right)\alpha \\ &= \left(\int r^2 \cdot dm\right)\alpha\end{aligned}$$

To jest równanie, które jest zbliżone do siły. I jest tensorem bezwładności, i jest podawany przez równanie, które przypomina środek środka masy, ale to pole zamiast odległości dla n połączonych elementów. Jak widać, istnieje zależność netto między masą a przyspieszeniem. Na uwagę zasługuje fakt, że istnieje również zależność między odległościami od osi obrotu podanymi przez r. Oczywiście ta formuła jest bardzo blisko środka masy; jeśli myślisz o problemie przez sekundę, powinno stać się jasne, że środek masy ma coś wspólnego Równanie siły zakłada, że stosujesz wszystko od środka masy. Z drugiej strony to równanie zakłada, że obiekt nie może się poruszać i że zastosowana siła jest wykorzystywana całkowicie do celów obrotowych. Dlatego środek masy odgrywa dużą rolę, ponieważ jeśli popchniesz obszar, w którym jest dużo masy, będziesz potrzebować większej siły, aby go przesunąć. Druga część równania, która określa moment obrotowy, wynika z faktycznej siły liniowej F zastosowanej jako funkcja odległości r od początku obrotu:

t = r x F

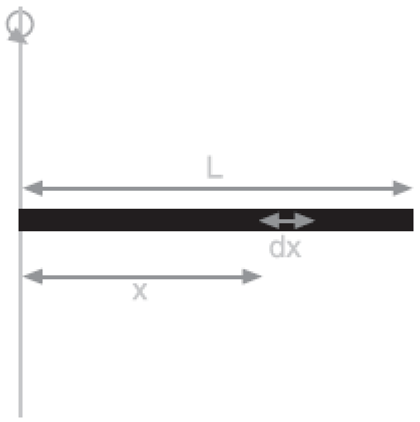
Jedną rzeczą, którą należy szybko zauważyć - przede wszystkim dlatego, że jest zdefiniowany jako iloczyn wektorowy - jest to, że moment obrotowy będzie w rzeczywistości wektorem zorientowanym w kierunku osi obrotu. Jego wytrzymałość (lub wielkość) zależy od siły (to znaczy większej siły, większego momentu obrotowego) i odległości, która jest również większa wraz ze wzrostem odległości. Aby to sprawdzić, rozważ klucz. Jeśli użyjesz klucza, aby spróbować nakręcić nakrętkę na miejsce, będzie to znacznie łatwiejsze jeśli użyjesz siły przy uchwycie, zamiast zbliżać się do nakrętki.

W rzeczywistości właśnie dlatego potrzebujesz klucza; w przeciwnym razie można po prostu użyć palców do wykonania pracy. W końcowym ćwiczeniu dla tego rozdziału załóżmy, że masz cylinder przymocowany poziomo do ściany na jednym końcu, a Spider-Man wisi na samym brzegu tego pręta. Ponieważ dużo je między filmami, bar się psuje. Oczywiście, Spider-Man spadnie w dół, strzeli w sieć i przetrwa, ale pasek, który jest uwalniany zaraz po jej pęknięciu, będzie kręcić sporadycznie w dół budynku. Oblicz początkowe przyspieszenie kątowe z powodu siły grawitacji dla pręta. Pierwszą rzeczą, którą chcesz zrobić, to obliczenie bezwładności cylindra. Łatwiej to powiedzieć niż zrobić, jeśli wybierzesz L jako długość paska, m jako masę, a r jako promień:

$$
\begin{aligned}
dI &= r^2 dm \\
&= x^2 (\lambda dx)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^L dI &= I \\
&= \int_0^L x^2 \cdot \lambda \cdot dm \\
&= \left.\frac{\lambda \cdot x^3}{3}\right]_0^L \\
&= \frac{\lambda \cdot L^3}{3} \\
&= \frac{m \cdot L^2}{3}
\end{aligned}
$$

Aby rozwiązać problem ze znalezieniem wartości dla dm, narysuj pasek, jak pokazano na rysunku 9.11.



dm jest ilością masy zawartej dla danej odległości, więc jeśli pomnożysz dx przez gęstość lambda, otrzymasz dm. r jest zastępowane tylko przez x, ponieważ x po prostu reprezentuje odległość od punktu obrotu. Reszta to zwykła algebra. Tak długo, jak pamiętasz, że całkowita masa obiektu jest w rzeczywistości długością paska razy gęstością, możesz uprościć równanie na samym końcu. Teraz masz bezwładność; musisz obliczyć akcelerację kątową masą Mas Spider-Mana. Dokładnie to robi:

$$\tau = I\alpha = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{p}}{I} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\langle L, 0, 0\rangle \times \langle 0, -mg, 0\rangle}{\frac{m \cdot L^2}{3}} \\
&= \frac{3\langle 0, 0, -Lmg\rangle}{2m \cdot L^2} \\
&= \left\langle 0, 0, \frac{-3g}{L} \right\rangle
\end{aligned}$$